Култаев Т.Ч., Момбекова Г.Б.

ОЮНДАР ТЕОРИЯСЫНА КИРИШҮҮ

Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу-усулдук колдонмо

Ош - 2006

Оюндар
теория сана
киришиц

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ, ИЛИМ ЖАНА ЖАШТАР САЯСАТЫ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

«ЭКОНОМИКАДАГЫ МАТЕМАТИКАЛЫК МЕТОДДОР» КАФЕДРАСЫ

Култаев Т.Ч., Момбекова Г.Б.

Оюндар теориясына киришүү

Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу-усулдук колдонмо

Ош - 2006

ОшМУнун Окумуштуулар Кеңеши тарабынан сунушталды

Рецензенттер:
Джураев А.М. - физика-математика илимдеринин кандидаты, ОшМУнун профессору;
Артыков А. - физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, ОшТУнун кафедра башчысы.

Култаев Т.Ч., Момбекова Г.Б.

Оюндар теориясына киришүү: Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу–усулдук колдонмо / Т.Ч.Култаев, Г.Б.Момбекова. –Ош: ОшМУнун басма борбору, 2006. –103 б.

Операциялардын жалпыланган схемасы жана анын нормалдуу математикалык модели, антагонистикалык жана матрицалык оюндар берилген.

Окуулук ЖОЖдордогу колдонмо математика, экономика багыттарындагы студенттер жана «Оюндар теориясын» өз алдынча үйрөнүүнү каалоочулар үчүн арналат.

Мазмуну

Киришүү..4
Биринчи бөлүм. Операцияларды изилдөөнүн негиздери 5
§1. Операциялардын жалпыланган схемасы жана анын нормалдуу математикалык модели..5
§2. Коалициялык эмес оюндардын объективдүү түрдө жазылышы. Операцияларды изилдөө маселесине мисалдар..........................7
§3. Толук баяндалбаган моделдердин максаттары, критерийлери жана операциялардын биригүүлөрү жөнүндө...............................11
§4. Вектордук оптималдаштыруудагы түрдүүчө оптималдуулук түшүнүктөрүнүн ортосундагы өз ара байланыштар.....................17
§5. Парето чечимдеринин жашашы жана мүнөзү..............................20
§6. Көзөмөлдөнбөгөн факторлордун берилген учурдагы эффективдүүлүк баасы жөнүндө. Маалыматка ээ болуунун түрдүү учурлары. Гарантияланган жыйынтык принциби........25
§7. Абсолюттуу оптималдуу жана оптималдуу гарантияланган стратегиялар..31
§8. Мисалдарды чыгаруу...35
Экинчи бөлүм. Антагонистикалык оюндар..................................41
§1. Ээр сымал чекиттер..41
§2.Тең салмактуулук абалдары жана оптималдуу гарантияга ээ стратегиялар...44
§3. Томпок-компактуу оюндардагы тең салмактуулук абалынын жашашы..48
§4. Тең салмактуулук абалынын мүнөзү.......................................51
Үчүнчү бөлүм. Матрицалык оюндар..53
§1. Негизги аныктоолор...53
§2. Аралаш стратегиялар..54
§3. Матрицалык оюндун аралаш кеңейиши жана фон Неймандын теоремасы..58
§4. Матрицалык оюндардагы оптималдуу стратегиялардын негизги касиеттери..60
§5. Матрицалык оюндарды жөнөкөй өзгөртүп түзүүлөр..................65
§6. Оптималдуулук шартынын башка баяндалышы.........................65
§7. Катаалсыздыкты толуктоочу шарттардын башка формалары 67
§8. Матрицалык оюндарды чыгаруунун графоаналитикалык ыкмасы...71
§9. Стратегияларды доминирлөө..75
§10. Матрицалык оюндар жана сызыктуу программалоо..................83
§11. Шепли-Сноу ыкмасы...90
Колдонулган адабияттар..103

Киришүү

Оюндар теориясынын практикада колдонуусу өтө эле кеңири мүнөздө экендиги талашсыз. Ошондуктан, бул курс жогорку баскычтагы окуу жайларынын түрдүү тармактагы адистиктеринде окутулат жана алынган билим жумуш орундарында болсун же жеке жашоо турмушта болсун колдонулат. Ошол себептүү, «Оюндар теориясы» багытындагы окуулуктардын орус же кыргыз тилиндеби жазылышынын [1-10] зыяны жок. Негизгиси, анын сапатында жана республикабыздын жогорку билим берүү стандартында көрсөтүлгөн талаптарына жооп берүүсүндө. А бирок, өзүңүздөргө белгилүү болгондой, азыркы учурда дээрлик бардык окуулуктардын орус тилинде болуусу көңүлдү кейитет, б.а. мамлекеттик тилде жазылган окуу китептери жокко эсе. Сунушталып жаткан окуу-усулдук колдонмонун максаты ушул кемчиликти аз да болсо жоюуда турат.

Колуңуздардагы китепче үч бөлүмдөн турат. Биринчи бөлүм – «Операцияларды изилдөөнүн негиздери» деп аталып, анда операциялардын жалпыланган схемасы жана анын нормалдуу математикалык моделинен баштап, абсолюттуу оптималдуу жана оптималдуу гарантияланган стратегиялар түшүнүктөрү берилген. Бөлүм акырында мисалдар чыгарылган.

Экинчи жана үчүнчү бөлүмдөрдө, тиешелеш түрдө антагонистикалык жана матрицалык оюндар каралган.

Окуулук жогорку окуу жайлардагы колдонмо математика, экономика жана башка багыттарда окуган студенттер жана «Оюндар теориясын» өз алдынча үйрөнүүнү каалоочулар үчүн арналат.

Биринчи бөлүм

ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨНҮН НЕГИЗДЕРИ

§1. Операциялардын жалпыланган схемасы жана анын нормалдуу математикалык модели

1.1.1-аныктоо. Кандайдыр бир белгилүү максатка жетүүгө багытталган аракеттердин жыйындысын *операция* деп атайбыз.

Демек, максат белгисиз болсо, анда операция да жашабайт. Операциянын максаты жалгыз деп эсептейбиз.

Операцияларды изилдөөнүн математикалык теориясында үч багытты бөлүп көрсөтүүгө болот:

1. Моделдештирүү - операциянын максатын, процессин жана жыйынтыгын математикалык түрдө жазууга мүмкүндүк берүүчү математикалык моделди түзүү;
2. Түзүлгөн моделдин негизинде атаандаш ыкмалардын эффективдүүлүгүн салыштыруу жана баалоо;
3. Оптималдуу аракетти тандап алуунун жана аны издөөнүн математикалык ыкмаларын иштеп чыгуу.

1.1.2-аныктоо. Берилген операциядагы коюлган максатка умтулуучу адамдардын же автоматтардын жыйындысын *операция жүргүзүүчүлөр* деп атайбыз.

Операция жүргүзүүчүлөр жүргүзүлгөн операцияда тең катышпаган анык эмес бир нече мүчөлөрдөн турат. Аларга операциянын максатын аныктоочулар да кирет. Бул учурда операция жүргүзүүчүлөр операция максатын каалагандай тандап алды деп эсептейбиз.

Айрым учурда операциянын максаты сырттан тандалат жана талкууга алынбайт. Бул абал спорттук оюндарда кездешет.

Операцияны изилдөөчү операция жүргүзүүчүгө кирет жана ошол эле максатты көздөйт.

Операцияны изилдөөчү аракетти тандап алууну өзү чечпейт. Ал болгону чечимди кабыл алуучу тарапка (ЧКТ) кеңеш бере алат.

Демек, операцияны изилдөөчү операция жүргүзүүчүлөргө киргендигине карабастан, ал операцияны толук изилдеп өзгөчө орунда турат. Ошол эле убакта ал кабыл алынган чечимдер үчүн жооп бербейт.

Коюлган максатка жетүү үчүн операция жүргүзүүчүлөр активдүү каражаттардын кандайдыр бир запасын (ресурсун) кармап турушат жана эреже катары бул запасты көздөгөн максатка жетүү үчүн колдонушат.

1.1.3-аныктоо. Активдүү каражаттарды пайдалануу ыкмаларын, б.а. аракеттер ыкмасын, *операция жүргүзүүчүлөрдүн стратегиялары* деп айтабыз.

Стратегияларды салыштыруу жана өзгөчөлүктөрүн баалоо операция жүргүзүүчүнүн жумушунун маңызын түзүт.

Белгилүү сандагы активдүү каражаттар менен берилген операциянын жыйынтыгы стратегияны тандап алуудан көз каранды болот. Бирок алынган жыйынтык операция жүргүзүүчүлөр тарабынан көзөмөлдөнбөгөн факторлордон да көз каранды болуп калышы мүмкүн.

Жалпысынан бул факторлорду *операция жүргүзүүнүн абалы* деп айтабыз.

Мисалы, бул айыл-чарбасында метоабал; аскердик аракеттерде – каршылаш тараптын аракети; базарда - конкуренттер жана партнерлердин аракеттери.

Каалаган операциянын компонентасын сапаттык түрдө жазуу операция *жүргүзүүчүлөр жана изилдөөчүнүн операцияны жүргүзүү жөнүнүдө кабардар болушун* көрсөтүү менен аяктайт.

Көзөмөлдөнбөөчү факторлор операция изилдөөчүнүн алар жөнүндө кабардар болушунун негизинде үч группага бөлүнөт.

I. Фиксирленген же бекемделип коюлган факторлор.
Булардын маанилери операция жүргүзүүчүлөргө белгилүү болот.

II. Кокустук фиксирленген факторлорю
Башкача айтканда бөлүштүрүү закондору белгилүү болгон кокустук процесстер.

III. Анык эмес факторлор.
Мында же алар жайгашкан факторду бөлүштүрүү областы белгилүү, же бөлүштүрүү закону жайгашкан область белгилүү.

Анык эмес факторлор өз кезегинде төмөндөгүдөй камтылуучу группаларга бөлүнөт:

1. Операция жүргүзүүчү адамдар же автоматтардын санынан көз карандысыз түрдө келип чыккан анык эмес факторлор. Аларды шарттуу түрдө *каршылаштын стратегиясы* деп айтабыз.
2. Кандайдыр бир процесстердин же чондуктардын жетишээрлик деңгээлде үйрөнүлбөгөндүгүнүн негизинде келип чыгуучу анык эмес факторлор. Мындай факторлорду *табигый факторлор* деп атайбыз.
3. Операциянын максатын же эффективдүүлүк критерийин билүүнүн так эместигин чагылдырган анык эмес факторлор.

Бул типтеги анык эмес факторлорду формалдуу түрдө табигый факторлорго кошууга болот. Бирок, булар операцияларды изилдөөдө өзгөчө орунда турарын белгилей кетүү керек.

Жогоруда айтылгандарды эске алсак операциянын математикалык моделин төмөнкүдөй жазууга болот:

$$F(x,y)\uparrow \max_{x}, x\in X, y\in Y$$

мында, X – операция жүргүзүүчүлөрдүн стратегияларынын көптүгү; Y – көзөмөлдөнбөгөн факторлор көптүгү; F – операция максаты.

Экстремалдык маселелерде көзөмөлдөнбөгөн факторлорду кийрүү салыштырмалуу түрдө жаңы момент болуп эсептелет. Ошондуктан операцияларды изилдөөдө оптималдаштыруу методдорун түздөн түз колдонуу мүмкүн эмес. Мында атайын математикалык аппарат керек. Аныксыздыктар менен берилген абалдарды системалык түрдө үйрөнүүнү операцияларды изилдөө теориясы жана оюндар теориясы көрсөтүп турат.

§2. Коалициялык эмес оюндардын объективдүү түрдө жазылышы. Операцияларды изилдөө маселесине мисалдар

Адекваттулукка умтулган ар бир социалдык-экономикалык же табигый көрүнүштүн математикалык модели ага тийиштүү болгон конфликттин мүнөзүн чагылдырышы керек. Башкача айтканда, математикалык модели менен берилген көрүнүштөр төмөндөгүдөй компоненталары чагылдырылган конфликтке мүмкүндүк бериши керек:

- кызыкдар болгон тараптар;
- ар бир тараптын мүмкүн болгон аракеттери;
- тараптардын кызыкчылыктары.

Жаңы белгилөөлөр жана терминдерди кийрүү менен конфликттин жогорудагы компоненталарынын формалдуу жазылышын көрсөтөбүз.

Кызыкдар болгон тараптарды мындан ары *оюнчулар же жактар* деп атайбыз.

Бардык оюнчулардын көптүгүн I деп белгилейбиз жана $I=\{1,...,n\}$ деп эсептейбиз. X_i - бул $i\in I$-оюнчунун *стратегияларынын көптүгү*, $x_i\in X_i$- бул i-оюнчунун *стратегиясы* болсун.

Конфликт шартында ар бир $i\in I$- оюнчу өзүнүн кандайдыр бир $x_i\in X_i$- стратегиясын тандап алат. Жыйынтыгында $\bar{x}=(x_1,...,x_n)$- стратегияларынын жыйындысына ээ болобуз жана аны *абал(ситуация)* деп атайбыз.

Баардык абалдардын көптүгү болуп $X_1 \times ... \times X_n \overset{\Delta}{=} \prod_{i \in I} X_i = \overline{X}$ көптүгү эсептелинет.

Ар бир $i-$оюнчуга ар бир $\overline{x} \in \overline{X}$ *абалында анын кызыкчылыктарынын канааттандырылыш даражасын туюндуруучу* сан жазылат. Бул сан $i-$оюунчунун $x-$абалындагы *утушу(выигрыш)* деп аталат жана

$$F_i : (\overline{x}) = F_i(x_1, ..., x_n)$$

деп белгиленет.

$F_i : \overline{x} \to R$ чагылдыруусу $i-$оюнчунун *утуш функциясы* же анын *эффективдүүлүк критерийи* деп аталат.

Ошентип, ар бир конфликт

$$\Gamma = \left\langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I} \right\rangle \qquad (1.2.1)$$

көрүнүшүндө көрсөтүлөт.

Мындай үчтүк *коалициялык эмес оюн* деп аталат.

Баардык коалициялык эмес оюндардын ичинен *антагонистикалык оюндар* классы бөлүнүп турат. Мында $I = \{1,2\}$ оюн, ал эми оюнчунун утуш функциясынын ар бир абалдагы маанилери модулу боюнча барабар жана белгиси боюнча карама-каршы болушат:

$$F_1(x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2)$$

Анда (1.2.1)-ни төмөндөгүдөй жөнөкөйлөтүүгө болот:

$$\Gamma = \langle X_1, X_2, F \rangle, (F = F_1)$$

Ар бир оюнчу үчүн стратегиялар көптүгү чектүү болгон коалициялык эмес оюн *чектүү коалициялык эмес* оюн деп аталат. Эгерде эки жактын чектүү оюнунда 1-оюнчунун стратегиясына кандайдыр бир таблицанын жолчолору, 2-оюнчунун стратегиясына анын мамычалары тиешелеш коюлуп, ал эми таблицанын клеткалары 1-оюнчунун утушу маанилери менен толтурулса, анда келип чыккан таблица 1-оюнчунун утуштарынын матрицасы деп аталат.

Эгерде таблицанын клеткалары 2-оюнчунун утуш функциясынын маанилери менен толтурулса, анда 2-оюнчунун утуштарынын матрицасы келип чыгат.

Бул түгөй матрицалар эки жактын коалициялык эмес чектүү оюнун толугу менен сүрөттөйт. Ошондуктан мындай оюндарды *биматрицалык оюндар* деп атайбыз.

Эгерде биматрицалык оюн антагонистикалык болсо, анда 2-оюнчунун утуштар матрицасы 1-оюнчунун утуштар матрицасын толугу менен аныктайт.

Ошондуктан биматрицалык антагонисткалык оюн жалгыз матрица (1-оюнчунун утуштар матрицасы) аркылуу толугу менен сүрөттөлөт жана *матрицалык оюн* деп аталат.

1.2.1-мисал (Зачет.) 1-оюнчу-бул зачетко даярданган студент, ал эми 2-оюнчу-бул зачетту кабыл алуучу окутуучу болсун.

Студенттин төмөндөгүдөй эки стратегиясы бар деп эсептейбиз:

- жакшы даярдануу (ok);
- жаман даярдануу (bad).

Окутуучунун да эки стратегиясы бар:

- зачет коюу (+);
- зачет койбоо (-).

Анда студенттин утушун төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \qquad + \qquad & \qquad - \qquad \end{array} \\ \begin{array}{c} Ok \\ Bad \end{array} & \begin{pmatrix} 2 \ (\textit{тиешелүү бааны коюшту}) & -1 \ (\textit{нааразычылык}) \\ 1 \ (\textit{эптеп баа алды}) & 0 \ (\textit{тиешелүү бааны алды}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ал эми окутуучунун утушун төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \qquad + \qquad & \qquad - \qquad \end{array} \\ \begin{array}{c} Ok \\ Bad \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \ (\textit{баары жайында}) & -2 \ (\textit{адилетсиздик болду}) \\ -3 \ (\textit{алдоого жол берди}) & -1 \ (\textit{студент дагы келет}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Бул биматрицалык оюн. Мында $I = \{1,2\}$, ал эми оюнчулардын стратегиясынын көптүгү: $X_1 = \{Ok, Bad\}$, $X_2 = \{+,-\}$. Утуш функциясынын маанилери жогорудагы матрицаларда келтирилген.#

1.2.2-мисал (Көпүрөнүн курулушу.)

Тегерек формасындагы шаар жетишээрлик кичине кеңдиктеги өзөндүн жардамында эки бөлүккө бөлүнгөн. Шаардын бир жарымынын каалаган бир чекитинен экинчи жарымына чейинки жол минималдуу боло тургандай кылып көпүрө курулуучу орунду тандоо талап кылынат.

Борбору C жана радиусу R болгон тегеректи карайбыз. Анда көпүрөнүн курулуш оруну тегеректин AB диаметриндеги кандайдыр бир x чекитин көрсөтүп турат. Мына ушул операция жүргүзүүчүлөрдүн (курулуш организациясынын) стратегиясын берет.

Шаардын түрдүү эки жарымындагы каалаган эки чекитти y_1 жана y_2 деп белгилейбиз. Бул чекиттер анык эмес көзөмөлдөнбөгөн факторлорду билдирет.

Мында мүмкүнчүлүктөрдүн мейкиндиги болуп $AB = X$ кесиндиси, ал эми y_1 жана y_2 нин мүмкүн болгон маанилеринин областы болуп тиешелеш түрдө тегеректин Π_1 жана Π_2 жарымдары эсептелет, демек $Y = \Pi_1 \times \Pi_2$.

Анда эффективдүүлүк критерийи төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$W(x,y) = P(y_1,x) + P(x,y_2)$$

Максатыбыз бул функционалды минималдаштыруу. Ал эми маселенин жалпы коюлушу төмөнкүдөй көрүнүштө болот:

$$W(x,y) \downarrow \min_{x}, x \in X, y_1 \in \Pi_1, y_2 \in \Pi_2 . \#$$

1.2.3-мисал (Товарлар ассортиментин тандоо.)

a сандагы бир тектүү сырье (активдүү каражат) берилсин. Бул сырьелордон R түрүндөгү товарларды (мисалы, териден түрдүү размердеги бут кийимдерди; сүттөн сметана, творог, сыр, май ж.б.) даярдоого мүмкүн болсун.

Ошондой эле баардык түрдөгү товарларга болгон жалпы b керектөөсү жана ар бир түрдөгү товардын керектөөсүнүн баасы $c_i, i = 1,...,k$, белгилүү жана $\sum_{i=1}^{k} c_i < b$ болсун.

Мында операциянын максаты болуп керектөөлөрдүн максималдык канааттандырылышы же керектөөлөрдүн минималдык канаатандырылбашы эсептелинет.

Ал эми операция жүргүзүүчүнүн стратегиясы болуп $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ вектору эсептелинет. Мында x_i – бул i – түрдөгү товарларды өндүрүүгө колдонулган сырье бирдиги. Мүмкүн болгон стратегиялардын көптүгү төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$X = \{ x = (x_1,...,x_k) / x_i \geq 0, i = 1,...,k, \sum_{i=1}^{k} x_i \leq a \} \qquad (1.2.2)$$

Көзөмөлдөнбөөчү фактор катары товарларга болгон чыныгы керектөөлөрдүн $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ вектору эсептелет жана анын мүмкүн болгон маанилери төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$Y = \{ y = (y_1,...,y_k) / y_i \geq 0, i = 1,...,k, \sum_{i=1}^{k} y_i \leq b \} \qquad (1.2.3)$$

Операциянын максатына эффективдүүлүк критерийин максималдаштыруу маселеси тиешелеш келет:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \min\{ q_i x_i - y_i, 0 \} \uparrow \max \qquad (1.2.4)$$

(1.2.4) туюнтмасы төмөндөгүнү билдирет: критерий канааттандырылбаган талаптардын суммасына барабар жана оң эмес: $F(x,y) \leq 0$. Талапка болгон сунуштун жогорулашы жөн эле талаптын жогорулашына барабар болот. #

§3. Толук баяндалбаган моделдердин максаттары, критерийлери жана операциялардын бригүүлөрү жөнүндө

Эки түрдөгү максаттарды жана аларга тиешелеш келген эффективдүүлүк критерийлерин бөлүп көрсөтүүгө болот.

1. Же ишке ашкан, же ишке ашпаган *«сапаттык» максаттар.*

Бул учурда максатка жеткирүүчү бардык жыйынтыктар бирдей жакшы; ошондой эле максатка жеткирбеген бардык жыйынтыктар бирдей канааттандырарлык эмес.

Мында эффективдүүлүк критерийи эки гана маанини кабыл алышы керек: 1 (ийгилик учурда) жана 0 (тескери учурда), же -1 жана $-\infty$(эгерде максатка жетүүнүн толук ыңгайсыз экендигин көрсөтүү керек болсо).

Мындай максатка мисал катары душманды бомбалап жаткан самолеттун атып түшүрүлүшүн келтирүүгө болот.

2. *Сандык аныкталган максаттар*. Мында кандайдыр бир чоңдуктун маанисин чоңойтууга же кичирейтүүгө умтулат. Бул чоңдуктун маселенин параметрлеринен көз карандылыгы операциянын эффективдүүлүк критерийин түзөт.

Көпчүлүк моделдер эффективдүүлүктүн сандык критерийи менен берилген операциялар катары эсептелиниши кокустук эмес. Көп учурда алгач операциянын максаты сапаттык түрдө баяндалат. Бирок, кокустук факторлордун келип чыгышы операциянын жүрүшүн да кокусунан кылат. Ошондуктан «жетишээрлик ишке аша турган» операциянын башка бир максатына өтөбүз. Бул биринчи типтин базасында түзүлгөн экинчи типтеги максат болот.

Көп учурда формасы боюнча сапаттык мүнөзгө ээ, бирок маселенин параметрлеринин ортосундагы байланышы жок биринчи түрдөгү жалган баяндоолор келип чыгат. Мисалга алсак, согушта жеңүү же коммунизмди куруу максаттары - болгону операцияны изилдөөгө жараксыз анык эмес чакырык (лозунг) болуп калат.

Бул учурда чакырыкты эквиваленттүү математикалык алмаштыруунун жоктугу же аныксыздык абалына же категориялык мүнөзгө ээ болбогон экинчи типтеги кандайдыр бир критерийди кийрүүгө алып келет.

Мындай абалга операция изилдөөчү гана күнөөлүү эмес. Мында операция жүргүзүүчүлөрдүн өз максаттарын так түшүнбөгөндүгү чагылдырылат.

Аныксыздык абалдарынын жыйынтыгы болуп эффективдүүлүк критерийи жок болгон операция моделинин толук эмес баяндалышы эсептелет.

Мында көзөмөлдөнгөн жана көзөмөлдөнбөгөн факторлордун төмөндөгүдөй вектор функциясы келип чыгат:

$$F(x,y)=\{F_i(x,y), i=1,...,k\}$$

$F_i(x,y)$ векторунун ар бир координатасы чоңойтулат (же кичирейтилет). Бирок координаталарды бир убакытта чоңойтууга (же кичирейтүүгө) мүмкүн болбогон учурда алардын кандай комбинацияларын пайдалануу керектиги белгисиз бойдон кала берет.

Толук баяндалбаган моделден кадимки корректүү моделге өтүү - бул $F(x,y)=\{F_i(x,y)\}$ вектор функциясынан кадимки $\Phi(x,y)$ функциясына өтүү процесси болот. Бул процесс эффективдүүлүктүн вектордук критерийин скалярдаштыруу деп аталат. Вектордук критерийди скалярдыштыруунун бир нече элементардык ыкмаларын, б.а. операцияларды изилдөөдө көп колдонулган кандайдыр бир

$$F_u=\Phi(F_i\,/\,i=1,...,k)$$

функцияларын тургузуу процессин карайбыз.

Мында математикалык логиканын айрым бөлүктөрүнө кайрылабыз.

I. Суммалоо же чогултуунун «экономикалык» ыкмасы

Мында бириктирилген операциянын максаты болуп төмөндөгүдөй типтеги суммалык критерийди максималдаштыруу эсептелет:

$$F_u=F_c=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i F_i, \qquad (1.3.1)$$

Мында λ_i жана F_i лер терс эмес сандар.

Бириктирүүнүн бул каралган ыкмасы жекече операциялардын максаты биринчи типтеги болсо да, бириктирилген операция үчүн экинчи (сандык) типтеги максатка алып келет, б.а.

$$F_i=\begin{cases}0, эгерде -;\\1, эгерде +.\end{cases}$$

Биринчи типтеги критерийди (1.3.1) боюнча бириктирүүдө операциянын бир нече түзүүчүлөрүнө жеке максаттарга жетүү зарылчылыктарынын колдонулушу мүмкүн. Мындай операциялар үчүн бул учурда $\lambda_i \geq 0$ жана

$$F_i=\begin{cases}0, эгерде -;\\1, эгерде +.\end{cases}$$

деп алуу керек.

II. $\{F_i\}$ **векторун канааттандырылган жана канааттандырылбаган деп бөлүү аркылуу биринчи типтеги максатка өтүү ыкмасы**

$$F_i \geq F_i^0, \; 1 \leq i \leq k, \tag{1.3.2}$$

орун алган $\{F_i\}$ вектору канааттандырылган деп эсептелинет, мында F_i^0-бул алдын ала берилген баалар.

Бул учурда бириктирилген операциянын критерийи төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$F_u = \begin{cases} 1, \textit{эгерде}\, i = 1,...,k : F_i \geq F_i^0 \; \textit{болсо}, \\ 0, \textit{калган учурларда}. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Бул вариант F ти чоңойтуу (максималдаштыруу) максатын $F \geq F^0$ барабарсыздыгынын аткарылыш максатына алмаштырууну билдирет жана аны $k = 1$ болгондо да колдонууга болот

III. Жеке максаттарга удаалаш жетүү ыкмасы

Мында кийинки операцияны аткаруу андан мурдагы жекече операциялардын эффективдүүлүк критерийинин абсолюттук максимумуна жеткенден кийин гана башталат.

Эгерде $F_i \geq 0$, $i = 1,...,k$, болсо, анда бириктирилген операциянын жыйынтыгы, табигый түрдө, операцияда алынган жыйынтыктардын суммасына барабар болот.

$F_i \geq 0$ болгондогу бириктирүүнүн мындай ыкмасын формалдуу түрдө төмөнкүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$F_u = F_i + \sum_{j=1}^{i-1} \sup_x F_j(x) \tag{1.3.4}$$

Мында j – бул $F_j = \sup F_j, j \leq i - 1$ шартын канааттандырат жана $F_i < \sup F_i$.

Акыркыдан башка бардык жеке операциялар биринчи типтеги максатка ээ болгон учурда мындай бириктүүнү пайдалансак, анда $i < k$ болгондо $\sup F_i = 1$ орун алат.

Экономикалык күчөтүүлөр жана согуштук аракеттер көп учурда бириктүүнүн мына ушул ыкмасынын жардамында сүрөттөлүшөт. Мисал катары, кол салуучу бөлүктөрдү удаалаш жок кылууну же таяныч пункттун ээлөөнү удаалаш уюштурууну келтирсек болот.

IV. Максаттардын логикалык бириктүүсү

Жекече операциялардын критерийлери (максаттары) биринчи типтеги критерийлер болушсун жана 0 же 1 деген маанилерди гана кабыл алышсын. Мындай критерийлердин үстүнөн көп учурда төмөндөгүдөй элементардык аракеттер жүргүзүлөт:

а) Карама-каршы максат. i – максаттын орун албашына умтулган максат берилген i – максатка карама-каршы максат деп аталат. Бул критерийлер үчүн төмөнкүдөй туюнтулат:

$$\overline{F}_i = 1 - F_i \qquad (1.3.5)$$

б) Максаттардын конъюнкциясы Бул бириктирилген максат төмөндөгү жеке максаттардын бардыгынын аткарылышын билдирет:

$$F_u = \prod_{i=1}^{k} F_i \qquad (1.3.6)$$

в) Максаттардын дизъюнкциясы. Бул бириктирилген максат төмөндөгү жеке максаттардын жок дегенде биринин аткарылышын билдирет:

$$F_u = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - F_i) \qquad (1.3.7)$$

V. Критерийлерди чогултуунун жалпы логикалык түрү

Мурдагы пункттагы аракеттердин түз жалпыланышы болуп (1.3.5)-нин ордуна

$$\overline{F}_i = -F_i + c \qquad (1.3.8)$$

антагонистик кызыкчылыктары эсептелет.

Ал эми (1.3.6)-нын ордуна

$$F_u = \min_{1 \le i \le k} \lambda_i F_i, \lambda_i > 0 \qquad (1.3.9)$$

минимумун эсептөө; (1.3.7)-нин ордуна

$$F_u = \max_{1 \le i \le k} \lambda_i F_i, \lambda_i \ge 0 \qquad (1.3.10)$$

максимумун эсептөө болот.

Эгерде бардык F_i лер $\{0;1\}$ маанилерин кабыл алып, $\lambda_i = 1$ болсо, анда (1.3.8), (1.3.9), (1.3.10)-лар тиешелеш түрдө (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7)-ге өзгөрөт.

VI. Векторлордун үстүнөн иреттөөнү кийрүү

R^k мейкиндигинде терс эмес болгон

$$R_+^k = \{(v_1, ..., v_k) \in R^k \,/\, v_i \ge 0, \forall i = 1, ..., k\} \qquad (1.3.11)$$

конусун жана анын ичин (оң конусту)

$$int\, R_+^k = \{(v_1, ..., v_k) \in R^k \,/\, v_i \ge 0, \forall i = 1, ..., k\} \qquad (1.3.12)$$-ни карайбыз.

R_+^k конусунун жардамында төмөнкүдөй эреже боюнча R^k ге тартип катышын кийребиз:

$$\left.\begin{array}{l} \{v \ge w\} \Leftrightarrow \{v - w \in R_+^k\} \Leftrightarrow \{v_i \ge w_i\}, \forall i = 1, ..., k\}, \\ \{v > w\} \Leftrightarrow \{v - w \in int R_+^k\} \Leftrightarrow \{v_i > w_i\}, \forall i = 1, ..., k\} \end{array}\right\} \qquad (1.3.13)$$

Бул тартип катышынын жардамында $F(x)\uparrow max, x\in D$ вектордук оптималдаштыруу маселесин чыгаруудагы төмөндөгүдөй аныктоолорду кийрүүгө болот.

1.3.1-аныктоо. Эгерде төмөндөгүдөй тең күчтүү шарттардын жок дегенде бирөө орун алса, анда $x_s\in D$ чекити $F(x)=(F_1(x),...,F_k(x)), F_i : R^n \to R, i=1,...,k$, вектордук критерийи үчүн $D\subset R^n$ көптүгүндөгү *Слейтер боюнча максимум чекити* деп аталат:

а)$\neg\exists\overline{x}\in D: F(\overline{x})\succ F(x_s)$;

б)$\neg\exists\overline{x}\in D: F(\overline{x})> F_i(x_s), \forall i=1,...,k$;

в)$F(x)-F(x_s)\notin int R^k_+, \forall x\in D$;

г) $\forall x\in D: \exists j=j(x), j\in\{1,...,k\}: F_j(x)\le F_j(x_s)$.

Эквиваленттүүлүктү далилдөө

а) $\Leftrightarrow$ б)

в) $\Leftrightarrow$ г). Эгерде $\forall x\in D: F(x)-F(x_s)\notin int R^K_+ \Leftrightarrow$ $\forall x\in D, \exists j=j(x), j\in\{1,...k\}, F_j(x)-F_j(x_s)\le 0 \Leftrightarrow г)$.

б)$\Rightarrow$г). Эгерде $\neg\exists\overline{x}\in D: F(\overline{x})> F_i(x_s), \forall i=1,...,k$ болсо, анда $\forall x\in D: \exists j=j(x): F_j(x)\le F_j(x_s)$.

в)$\Leftrightarrow$а). Эгерде $F(x)-F(x_s)\notin int R^k_+, \forall x\in D$ болсо, анда $\neg\exists\overline{x}\in D: F(\overline{x})-F(x_s)\in int R^k_+, \Leftrightarrow \exists\overline{x}\in D: F(\overline{x})\succ F(x_s)$.

1.3.2-аныктоо. Эгерде төмөндөгү тең күчтүү шарттардын жок дегенде бири орун алса, анда $x_p\in D$ чекити $F(x)=(F_1(x),...,F_k(x))$ вектордук критерийи үчүн D мүмкүн болгон көптүгүндөгү *Парето боюнча максимум чекити* деп аталат:

а) $\neg\exists\overline{x}\in D: F(\overline{x})\ge F(x_p)$ жана $F(x)\ne F(x_p)$;

б)$\neg\exists\overline{x}\in D: F_i(\overline{x})\ge F_i(x_p), \forall i=1,...,k$ жана мындан сырткары $\exists j=\{1,...,k\}: F_j(\overline{x})> F_j(x_p)$;

в) $F(x)-F(x_p)\notin R^k_+\setminus\{0\}, \forall x\in D$;

г)же $\forall x\in D: F_i(x)\le F_i(x_p), \forall i=1,...,k;$ же $\exists j=j(x)\in\{1,...,k\}: F_j(x)< F_j(x_p)$.

Слейтер боюнча жана Парето боюнча максимум чекиттеринин көптүгүн тиешелеш түрдө S жана P деп белгилейбиз.

Парето боюнча чечимдин а), б), в) жана г) аныктоолорунун эквиваленттүүлүгү Слейтер боюнча чечимге аналогиялуу түрдө далилденет.

VII. Максаттуу функциялардын иерархиялык системасын минималдаштыруу

F вектордук критерийинин $F_1,...,F_k$ компоненталарынан төмөндөгү принциптин жардамында иерархиялык системаны түзөбүз: компонентаны максималдаштыруу канчалык маанилүү болсо, ага ошончолук кичине индекс ыйгарылат.

Тагыраак айтканда R^k да лексикографикалык тартип катышын кийребиз, б.а. $\forall u,v \in R^k : u=(u_1,...,u_k), v=(v_1,...,v_k)$ үчүн

эгерде $\exists i \in \{1,...,k\} : u_i > v_j$ жана $\forall j < i : u_i = v_j \Leftrightarrow u \overset{l}{>} v$, $\forall i \in \{1,...,k\} : u_i = v_j \Leftrightarrow u \overset{l}{=} v$. ($\overset{l}{>}$ - лексикографикалык чоң белгиси)

1.3.3-аныктоо. Эгерде $F(x_l) \overset{l}{\geq} F(x), \forall x \in D$ катышы орун алса, анда $x_l \in D$ чекити *вектордук максимизация* $(l - max)$ *маселесинин лексикографикалык тартип катышы маанисиндеги максимум чекити* деп аталат.

D көптүгүндөгү лексикографикалык максимум чекиттеринин көптүгүн L деп белгилейбиз.

VIII. Орточо квадраттагы оптималдаштыруу (Солуквадзе чечимдери)

Көп учурларда изилдөөлөр процессинде ар бир жекече критерий үчүн жогорку же төмөнкү грандар жөнүндөгү информация келип чыгат. Бул маалыматты пайдалануу максатында эффективдүүлүктүн вектордук критерийин чогултуунун төмөндөгүдөй методикасы сунуш кылынат.

$F_i^* = \max_x \{F_i(x) \mid x \in D\} = max(F_i, D), i = 1,...,k$ берилген же аны табууга мүмкүн болсун.

$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{k} \left| F_i(x) - F_i^* \right|^2, x \in D$ функционалын тургузабыз жана

$$\Phi_1(x) \to min, x \in D \qquad (1.3.14)$$

маселесин карайбыз.

Аналогиялуу түрдө эле, эгерде

$F_{i^\bullet} = \min_x \{F_i(x) \mid x \in D\} = min(F_i, D), i = 1,...,k$

берилген же аны эсептөөгө мүмкүн болсо, анда

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{k} \left| F_i(x) - F_{i^\bullet} \right|^2, x \in D$$

функционалын тургузабыз жана

$$\Phi_2(x) \to max, x \in D \qquad (1.3.15)$$

маселесин карайбыз.

(1.3.14) жана (1.3.15)-маселелердин чечимдеринин көптүгүн тиешелеш түрдө Q_1 жана Q_2 деп белгилейбиз.

$F_i(x), i \in I \subset \{1,...,k\}$ функционалы үчүн $F_{i}^{\bullet} = max(F_i, D), i \in I$ ны издөө, ал эми индекстердин кошумча $J = \{1,...,k\} | I$ көптүгү үчүн $F_{i\bullet} = min(F_i, D), i \in J$ маанисин издөө ыңгайлуу болуп калышы мүмкүн.

Анда

$$\Phi_3(x) = \sum_{i \in I} \left|F_i(x) - F_i^{\bullet}\right|^2 - \sum_{i \in J} \left|F_i(x) - F_{i\bullet}\right|^2$$

функционалын тургузабыз жана

$$\Phi_3(x) \to min, x \in D \qquad (1.3.16)$$

маселесин чыгарабыз. Бул маселенин чечимдеринин көптүгү Q көптүгүн түзөт.

§4. Вектордук оптималдаштыруудагы түрдүүчө оптималдуулук түшүнүктөрүнүн ортосундагы өз ара байланыштар

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i, \ \lambda_i > 0, \forall i = 1,...,k$ суммалык критерийи маанисиндеги, Слейтер боюнча, Парето боюнча, лексикографикалык тартип катышы маанисиндеги жана орточо квадраттык чечимдеринин көптүгүн тиешелеш түрдө Σ, S, P, L, Q деп белгилейбиз. Анда бул көптүктөрдүн ортосундагы өз ара байланыштар төмөндөгүдөй схема боюнча туюнтулат:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & & \cap & & \\ \Sigma & \subset & P & \subset & S \\ & & \cup & & \\ & & L & & \end{array}$$

1.4.1-чийме

Мында бир дагы тескери камтылуу орун албайт. Бул камтылуулардын айрымдарына токтолобуз.

1.4.1-сүйлөм. $P \subset S$ сүйлөмү аткарылат.

Далилдөө. I. $x_p \in P$ болсун, б.а. (б)аныктоо боюнча)

$$\neg \exists \bar{x} \in D : F_i(\bar{x}) \geq F_i(x_p), \forall i = 1,...,k$$

жана мындан сырткары $\exists j = j(\bar{x}) : F_j(\bar{x}) > F_j(x_p)$ орун алат. Анда

$$\neg \exists \bar{x} \in D : F_i(\bar{x}) > F_i(x_p), \forall i = 1,...,k$$

демек, $x_p \in S$ болот.

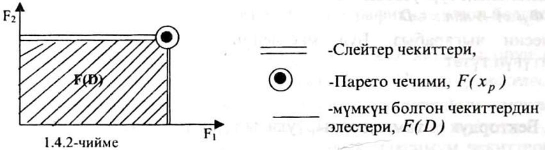
II. $x_p \in P$ болсун, б.а. (в)аныктоо боюнча)

$$F(x) - F(x_p) \notin R_+^k \setminus \{0\}, \forall x \in D$$

орун алат. Анда

$$\forall x \in D : F(x) - F(x_p) \notin int\, R_+^k$$

демек, $x_p \in S$ болот. #



1.4.2-чийме

1.4.2-сүйлөм. $\forall \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k) \in int\, R_+^k$ үчүн (бул $\lambda_i > 0, \forall i = 1,...,k$ дегенди билдирет) $F_c(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x), x \in D$ функциясынын максимум чекити Парето чекити болот, б.а. $\Sigma \subset P$.

Далилдөө. Карама-каршысынан далилдейбиз. Эгерде $z \notin P$ болсо, анда

$$\exists \bar{x} : F_i(\bar{x}) \geq F_i(z); \exists j \in \{1,...,k\} : F_j(\bar{x}) > F_j(z).$$

Анда каалагандай $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k) \in int\, R_+^k$ вектору үчүн

$$\lambda_i F_i(\bar{x}) \geq \lambda_i F_i(z); \forall i = 1,...,k$$

жана $\lambda_j F_j(\bar{x}) > \lambda_j F_j(z)$ орун алат. Анда

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(\bar{x}) > \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(z)$ же $z \notin Arg\,max(F_c, D)$, б.а. $z \notin \Sigma$ болот. #

Жогорудагы схемага кирбеген катыштар да жашайт.

1.4.3-сүйлөм. $\forall \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k) \in int\, R_+^k \setminus \{0\}$ (б.а. $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1,...,k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i > 0)$ үчүн $F_c(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x), x \in D$ функционалынын максимум чекити Слейтер чекити болот, б.а. $\Sigma_1 \subset S$ болот.

Далилдөө. Эгерде $z \notin S$ болсо, анда

$$\exists \bar{x} \in D : F_i(\bar{x}) > F_i(z), \forall i = 1,...,k.$$

Анда каалагандай $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_k)\in R_+^k\setminus\{0\},\exists j:\lambda_j>0$ болгондуктан $\lambda_j F_j(\bar{x})>\lambda_j F_j(z)$ орун алат. Анда $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i F_i(\bar{x})>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i F_i(z)$ же $z\notin Arg\max(F_c,D)$, б.а. $z\notin\Sigma_i$ болот. #

1.4.4-сүйлөм. z чекити Парето боюнча чечим, б.а. $z\in\bigcap_{j=1}^{k}Sol(P_j)$, болот, качан жана качан гана $\forall j=\{1,...,k\}$ үчүн z чекити төмөндөгүдөй оптималдаштыруу маселесинин чечими болсо:

$$\left.\begin{array}{l} F(x)\uparrow \max, x\in D \\ F_i(x)\geq F_i(z), i\neq j \end{array}\right\} \qquad (P_j).$$

Далилдөө. а) $z\in P, j=\{1,...,k\}$ болсун. (P_j) маселесиндеги мүмкүн болгон $\bar{x}$ чекитин карайбыз, б.а. $\bar{x}\in D: F_i(\bar{x})\geq F_i(z), i\neq j$. Эгерде $F_j(\bar{x})>F_j(z)$ болсо, анда z Парето чечими болбойт эле, б.а. $z\notin P$ болмок. Ошондуктан $F_j(\bar{x})\leq F_j(z)$. Анда $z\in Sol(P_j)$, z чекити (P_j) маселесинин мүмкүн болгон чекити болуп эсептелет.

б) Эми $\{z\notin P\}\Rightarrow\{\exists j_0: z\notin Sol(P_{j_0})\}$ айтуусунун тууралыгын көрсөтөбүз. Бул айтуу төмөндөгүгө тең күчтүү:

$\{z\in P\}\Leftarrow\{z\in Sol(P_j),\forall j=\{1,...,k\}\}$.

Чындыгында, эгерде $z\notin P$ болсо, анда

$$\exists\bar{x}\in D: F_i(\bar{x})\geq F_i(z),\forall i=1,...,k$$

жана мындан сырткары $\exists j_0: F_{j_0}(\bar{x})>F_{j_0}(z)$. Демек,

$$\exists j_0: z\notin Sol(P_{j_0}).\ \#$$

1.4.5-сүйлөм. (1.4.2-нин жалпыланышы)

D -бул R^n ден алынган томпок көптүк, $F_i: R^n\to R$ лер иймек функциялар, $z\in D$ болсун. Мындан сырткары $\forall j=\{1,...,k\}$ үчүн төмөндөгү шарт орун алсын:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\bar{v}_j\in int\,D \\ F_i(t)<F_i(\bar{v}_j),\forall i\neq j \end{array}\right\} \qquad (R_j)$$

(Б.а. (R_j) -бул (P_j) маселесиндеги регулярдуулук шарты). Анда, эгерде $z\in P$ болсо, анда $\exists(\lambda_1,...,\lambda_k)\in int\,R_+^k,(\lambda_i>0,i=1,...,k)$ табылып, z чекити төмөндөгү маселенин чечими болот:

$$F_c(x)\overset{\Delta}{=}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i F_i(x)\to\max, x\in D \qquad (P_c).$$

Далилдөө. Айталы $z \in P$ болсун. Анда 1.4.4-сүйлөм боюнча z чекити $(P_j), \forall j \in \{1,...,k\}$ маселесинин чечими болот. Мында (P_j) маселеси -томпок, ал эми (R_j) регулярдуулук шарты -(P_j) маселесиндеги Лагранж көбөйтүүчүсү бирге барабар болушу үчүн зарыл жана жетиштүү шарт болот.

Анда Кун-Таккердин теоремасы боюнча $\forall j \in \{1,...,k\}, \exists \mu_i^j \geq 0 (\mu_j^j = 1)$ үчүн

$$F_j(z) + \sum_{i \neq j} \mu_i^j F_i(z) \geq F_j(x) + \sum_{i \neq j} \mu_i^j F_i(x), \forall x \in D \qquad (1.4.1)$$

Мында j боюнча суммаласак төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\sum_{j=1}^{k} F_j(z) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \neq j} \mu_i^j F_i(z) \geq \sum_{j=1}^{k} F_j(x) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \neq j} \mu_i^j F_i(x), \forall x \in D \qquad (1.4.2)$$

$\lambda_j = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^j$ деп алабыз. Анда $\mu_j^j = 1$ болгондуктан $\lambda_j \geq 1$ болот.

Анда (1.4.2)-формуладан төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_i^j F_j(z) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \neq j} \mu_i^j F_i(z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_i^j F_i(z) = \sum_{i=1}^{k} F_i(z) (\sum_{j=1}^{k} \mu_i^j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(z)$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_i^j \geq 1.$$

Аналогиялуу эле операцияны (1.4.2)-нин оң жагына жүргүзүү менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x), \forall x \in D \qquad (1.4.3).$$

Демек,

$$F_c(z) \geq F_c(x), \forall x \in D$$

экендиги далилденди. #

§5. Парето чечимдеринин жашашы жана мүнөзү

Бул параграфта вектордук оптималдаштырууда Парето чечимдеринин жашашы үчүн кандай шарттар орун алышы керек экендигин көрсөтөбүз.

1.5.1-аныктоо. Эгерде төмөндөгү барабарсыздыктар орун алса, анда $f(x)$ функциясы *төмөндөн (жогортон) жарым үзгүлтүксүз* деп аталат:

$$\lim_{k\to\infty} inf\, f(x^k) \geq f(x^0); (\lim_{k\to\infty} sup\, f(x^k) \leq f(x^0))$$
$$\forall\{x^k\}: x^k \to x^0.$$

1.5.2-теорема. $F = (F_1,...,F_k)$ - эффективдүүлүктүн вектордук критерийи болсун. Мында ар бир $F_i, i = 1,...,k,$ - функциясы D көптүгүндө жогортон жарым үзгүлтүксүз функциялар. Мындан сырткары төмөндөгү шарттардын бири орун алсын:

а) D - компакттуу;

б) D - туюк; ал эми $F_i : F_j, j \in \{1,...,k\}$ функцияларынын бири минус-коэрсивдүү, б.а. $\|x^k\| \to +\infty$ да $F_j \to -\infty$ умтулсун.

Ошондой эле бардык F_i функциялары D көптүгүндө жогортон чектелген, б.а. $\forall i : F_i(x) \leq c_i, \forall x \in D$ орун алсын. Анда $F = (F_1(x),...,F_k(x)) \to P\,max, x \in D$ (P) маселесинде Парето чечими жашайт.

Далилдөө. 1) $\lambda_i > 0, i = 1,...,k$ болсун. Анда $sup(F_c, D) < +\infty$ боло тургандай $F_c(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x)$ функциясын карайбыз. Бул функциянын жогортон жарым үзгүлтүксүз экендигин, б.а.

$$\forall\{x^k\}: x^k \to x^0 : \lim_{k\to\infty} F_c(x^k) \leq F_c(x^0)$$

экендигин көрсөтүүгө болот.

$F_c(x) \to sup, x \in D$ (P_c) маселесин карайлы.

Жогорку грандын аныктоосу боюнча төмөндөгү удаалаштыктын максимумун табууда (P_c) маселесинин чечими ар дайым жашайт:

$$\{x^m\}: \lim_{k\to\infty} F_c(x^m) = sup(F_c, D).$$

2) Бул удаалаштыктын чектелген экендигин көрсөтөбүз.

а) Бул учурда D-компакт, ал эми $\{x^m\} \subset D$ болгондуктан $\{x^m\}$ чектелген болот.

б) $\{x^m\}$ -чектелбеген, б.а. $\|x^k\| \to +\infty$ болсун дейли. Анда

$F_j(x^m) \to -\infty, F_i(x^m) \leq c_i, i \neq j$ болот.

$$\lim_{m\to\infty} F_c(x^m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x^m) \leq \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{i\neq j} \lambda_i c_i + \lambda_j F_j(x^m)\right] =$$
$$= \sum_{i\neq j} \lambda_i c_i + \lambda_j \lim_{m\to\infty} F_j(x^m) = -\infty$$

Бул болсо $\lim_{k\to\infty} F_c(x^m) = sup(F_c, D) \in R$ болушуна карама-каршы келет.

3) $\{x^m\}$ чектелген удаалаштыгынан камтылуучу $\{x^k\} \subset\subset \{x^m\}, x^k \to x_*$ жыйналуучу удаалаштыгын бөлүп алууга болот. D нын туюктугунун негизинде $x_* \in D$ болот. Ошондуктан

$$F_c(x_*) \le sup(F_c, D) \qquad (1.5.1)$$

Мындан сырткары максималдаштыруучу удаалаштыкты тургузуу боюнча $\varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \to 0$ да

$$F_c(x^k) \ge sup(F_c, D) - \varepsilon_k \qquad (1.5.2)$$

орун алат.

Ошондой эле F_c функциясы жогортон жарым үзгүлтүксүз:

$$\lim_{k\to\infty} sup\, F_c(x^k) \le F_c(x^*) \qquad (1.5.3)$$

Анда төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$sup(F_c, D) \overset{(1.5.1)}{\ge} F_c(x_*) \overset{(1.5.3)}{\ge} \lim_{k\to\infty} sup\, F_c(x^k) \overset{df}{\ge}$$

$$\ge \lim_{k\to\infty} inf\, F_c(x^k) \overset{(1.5.2)}{\ge} sup(F_c, D)$$

4) Ошентип,

$$x_* \in Arg\,max(F_c, D), F_c = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i .$$

Анда 1.4.2-сүйлөм боюнча $x_* \in P$. Демек, Парето чечиминин жашашы далилденди. #

1.5.3-эскертүү. Жогорудагы болжолдоолордо биз Парето чечиминин $\forall \lambda = (\lambda_1 ..., \lambda_k), \lambda_i > 0, i = 1,...,k$ жана $sup(F_c, D) \in R$ үчүн жашай тургандыгын далилдедик. Парето чечимдери жетишээрлик көп санда, жалпы алганда k ченемдеги бир бүтүн континуум (алардын айрымдары бири-бири менен дал келишет).

1.5.4-теорема. F_i - бул z чекитинде дифференцирленүүчү болгон иймек функциялар, ал эми D - томпок көптүк болсун. Анда $z \in D$ тин

$F(x) = (F_1(x),..., F_k(x)) \to P - max, x \in D$ $\qquad (P)$ -вектордук оптималдаштыруу маселесине Парето боюнча чечими болушу үчүн

$\exists \lambda = (\lambda_1,..., \lambda_k) \in int\, R_+^k$ (б.а. $\lambda_i > 0, \forall i = 1,...,k$) :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla F_i(z), x - z \right\rangle \le 0, \forall x \in D \qquad (1.5.4)$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) *Жетиштүүлүк шарты.*

Мында $(1.5.4) \Rightarrow \{z \in P\}$ айтуусун далилдөө керек. Биз буга тең күчтүү болгон $\{z \notin P\} \Rightarrow \neg(1.5.4)$ шартын далилдейбиз.

Чындыгында, эгерде z Парето боюнча чечим болбосо, анда

$\exists\bar{x}\in D: F_i(\bar{x})\geq F_i(z), \forall i=1,...,k, \exists j\in\{1,...,k\}: F_j(\bar{x})>F_j(z)$ болот. Иймек функция үчүн негизги барабарсыздыкты пайдаланып төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\langle\nabla F_i(x_p),\bar{x}-x_p\rangle\geq F_i(\bar{x})-F_i(x_p)\geq 0, \forall i,$$
$$\langle\nabla F_{ij}(x_p),\bar{x}-x_p\rangle\geq F_j(\bar{x})-F_{ij}(x_p)>0.$$

Акыркы барабарсыздыкты каалагандай $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_k)\in int\, R_+^k$ векторуна көбөйтүп жана алынган жыйынтыктарды суммалап

$$\left\langle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla F_i(x_p)\bar{x}-x_p\right\rangle=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\langle\nabla F_i(x_p),\bar{x}-x_p\rangle>0$$

шартына ээ болобуз, б.а. $\forall\lambda\in int\, R_+^k$ үчүн (1.5.4)-шарты бузулат. Жетиштүү шарты далилденди.

2) *Зарылдык шарты.* $z\in P$ болсун. Төмөндөгүдөй эки көптүктү карайбыз:

$$K=\{a=(a_1,...,a_k)\setminus a_i\geq 0, i=1,...,k\}=R_+^k$$
$$int\, K=\{a=(a_1,...,a_k)\setminus a_i>0, i=1,...,k\}\neq\emptyset,$$
$$B=\{b=(b_1,...,b_k)\setminus\exists x\in D: b_i=\langle\nabla F_i(z),x-z\rangle\}\subset R^k$$

а) K -томпок туюк конус. B нын томпок экендигин көрсөтөбүз. Чындыгында, эгерде $a\in]0,1[, b,c\in B,$ б.а. $\exists x_b\in D, x_c\in D:$

$$\left.\begin{aligned}b_i&=\langle\nabla F_i(z),x_b-z\rangle,\\ c_i&=\langle\nabla F_i(z),x_c-z\rangle.\end{aligned}\right\}\ (i=1,...,k).$$

Анда

$$ab+(1-a)c=(ab_i+(1-a)c_i)=$$
$$=(a\langle\nabla F_i(z),x_b-c\rangle+(1-a)\langle\nabla F_i(z),x_c-z\rangle)=$$
$$=(\langle\nabla F_i(z),ax_b+(1-a)x_c-zc\rangle)=(\langle\nabla F_i(z),x_a-z\rangle).$$

Мында $a\in]0,1[$ болгондуктан D нын туюктугунун негизинде $x_a\overset{\Delta}{=}ax_b+(1-a)x_c\in D$ болот. Демек, B -томпок.

б) $0=\{\langle\nabla F_i(z),z-z\rangle\}\in B$ болгондуктан $\{0\}\in K\cap B$ экендигин көрүү кыйын эмес.

$(int\, K)\cap B=\emptyset$ (1.5.5)-нин орун алаарын көрсөтөбүз. Чындыгында, эгерде $\exists b\in B\cap(int\, K)$ болсо, анда $b_i>0, i=1,...,k$ болот. Мындан сырткары

$$\exists\hat{x}\in D: b_i=\langle\nabla F_i(z),\hat{x}-z\rangle>0, i=1,...,k \qquad (1.5.6).$$

Дифференцирленүүчүлүктүн аныктоосу боюнча

$$F_i(z+t(\hat{x}-z))-F_i(z)=t\langle\nabla F_i(z),\hat{x}-z\rangle+tO(t).$$

Ошондуктан жетишээрлик кичине $t \in]0,1[$ үчүн (1.5.6)-нын негизинде төмөндөгүгө ээ болобуз $(x_t = z + t(\hat{x} - z))$:

$$F_i(t\hat{x} + (1-t)z) - F_i(z) = t\left[\left\langle \nabla F_i'(z), \hat{x} - z \right\rangle + O(t)\right] > 0.$$

Ошентип,

$$F_i(x_t) - F_i(z) > 0, i = 1,...,k, x_t \in D.$$

Алынган барабарсыздыктар z тин Слейтердик чекит да болбой тургандыгын далилдегендиктен, $z \in P$ эмес экендигине ээ болобуз. Демек, (1.5.5) катышы далилденди.

c) Анда бөлүнүүчүлүктүн биринчи теоремасы боюнча:

$$\exists \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k) \neq 0 \in R^k ; \exists \gamma \in R : \forall b \in B : \langle \lambda, b \rangle \leq \gamma < \langle \lambda, a \rangle, \forall a \in int\, K \quad (1.5.7)$$

Бизде

$$\gamma < \langle \lambda, a \rangle, \forall a \in int\, K, 0 \in K = cl(int\, K)$$

болгондуктан $\|a\| \to 0, a \in int\, K$ болгондо $\gamma \leq 0$ го ээ болобуз. Экинчи жактан $0 \in B$ болгондуктан $\gamma \geq 0$ болот. Демек, $\gamma = 0$. Анда (1.5.7)-ден

$$\forall b \in B : \langle \lambda, b \rangle \leq 0 < \langle \lambda, a \rangle, \forall a \in int\, K \quad (1.5.8)\text{-ге}$$

ээ болобуз. Ал эми $a_i > 0$ болгондуктан акыркы барабарсыздыктын оң жагынан $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1,...,k$ келип чыгат. (1.5.8)-нин сол жагынан жана B көптүгүнүн аныктоосунан төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \nabla F_i(z), x - z \rangle \leq 0, \forall x \in D. \#$$

§6. Көзөмөлдөнбөгөн факторлордун берилген учурдагы эффективдүүлүк баасы жөнүндө. Маалыматка ээ болуунун түрдүү учурлары. Гарантияланган жыйынтык принциби

Көзөмөлдөнбөгөн факторлордун бардыгын y вектору аркылуу, ал эми стратегияларды жалпы учурда $x(y)$ функциясы аркылуу белгилейбиз, б.а. $x : Y \to 2^A$, мында A -активдүү каражаттардын көптүгү, 2^A -бул A нын камтылуучу көптүктөрүнүн көптүгү.

Эгерде y жөнүндөгү маалымат жок же колдонулбаса, анда $x(y) = x$, б.а. y тен көз карандылык жок болот.

Эгерде көзөмөлдөнбөгөн факторлор фиксирленип же бекемделип коюлса ($y = y_0$), анда стратегиянын эффективдүүлүгү $F(x(y_0), y_0) = W$ саны болот жана бул сан операция изилдөөчү тарабынан аныкталган болушу мүмкүн. Мына ушул эсептөөлөрдү эффективдүүлүктү аныктоо деп атайбыз. Бул жыйынтык y_0 жөнүндөгү маалыматтын негизинде гарантияга ээ болот.

Бирок, жалпы учурда операция изилдөөчү үчүн y бекемделген эмес. Ошондуктан эффективдүүлүк операция изилдөөчүгө белгисиз функция болуп эсептелет.

Бул учурда стратегиянын эффективдүүлүгү жөнүндөгү изилдөөчү билген маалымат $W(y) = F(x(y), y)$ функциясы жөнүндөгү маалымат болот.

Бирок, мындай маалымат операция жүргүзүүчүлөр үчүн ыңгайсыз.

Ошондуктан стратегиянын эффективдүүлүгүн бир гана сан менен мүнөздөө ыңгайлуу. Эгерде мүнөздөмөнү изилдөөчү бериши керек болсо, анда мындай баалоолор гарантияланган жыйынтык принцибине таянат.

A **абалы**. Эгерде y жөнүндө анын өзгөрүү областы Y тен башка эч нерсе белгисиз болсо, анда жалгыз гана төмөндөгүдөй түрдө *эффективдүүлүктү баалоого* болот:

$$W_0 = \inf_{y \in Y} W(y) = \inf_{y \in Y} (x(y), y) \qquad (1.6.1)$$

Башкача айтканда, стратегия операция жүргүзүүчүлөр үчүн эң начар деген болжолдоолордо тандалат.

Бул айтылганды төмөндөгүдөй да баяндоого болот:

Операция изилдөөчү үчүн анык эмес факторлордон көз каранды болгон критерийлерди чогултуунун жалгыз жолу болуп (1.6.1)-эсептелет. Мында Y көптүгүн аныктоодо операция изилдөөчүгө белгилүү болгон y жөнүндөгү бардык маалыматты эске алуу керек. Чындыгында, эгерде y -активдүү каршылаштын аракетинин жыйынтыгы болсо, анда y ти анын максаттарына тиешелеш түрдө тандоо керек. Эгерде каршылаштын максаттары операция жүргүзүүчүлөрдүн максаттарына карама-каршы болсо, анда ал $F(x, y)$ критерий чоңдугун кичирейтүүгө умтулат. Эгерде ага мындан сырткары $x(\cdot)$ стратегиясы да белгилүү болсо, анда ал y ти (1.6.1)-чоңдук реализациялана тургандай же бул чоңдукка жетишээрлик жакын келе тургандай кылып тандайт.

Демек, төмөндөгүдөй болжолдоого болот:

1) көзөмөлдөнбөөчү факторлордун максаты болуп $F(x,y)$ эффективдүүлүк критерийин минималдаштыруу эсептелет, б.а. операция жүргүзүүчүлөрдүн максатына антагонистикалык болот;
2) операция жүргүзүүчүнүн $x(\cdot)$ стратегиясы каршылашына белгилүү;
3) (1.6.1)-ни реализациялоого эч ким тоскоолдук кыла албайт.

Ошондуктан, эгерде y -бул операция жүргүзүүчүгө карама-каршы максатка жана $x(\cdot)$ жөнүндө маалыматка ээ болгон каршылаш десек, анда (1.6.1)-так аткарылат.

B абалы. Эми каршылашыбыз карама-каршы эмес максатка ээ болсун. Анда анын кызыкчылыктары кандайдыр бир

$$G(x,y)\uparrow \max_{y}, y\in Y \qquad (1.6.2)$$

эффективдүүлүк критерийи аркылуу туюнтулат.

Эгерде операция изилдөөчүгө каршылаштын бул критерийи белгилүү болсо, анда ал Y ти тактоо менен гарантияланган жыйынтык принцибине туруп (1.6.1)-бааны жакшырта алат.

Мына ушуну көрсөтөлү. Демек, эгерде каршылашынын $x(y)$ стратегиясын билүүсү изилдөөчүгө белгилүү болсо, анда ал

$$\hat{g}(y)=G(x(y),y) \qquad (1.6.3)$$

функциясын максималдаштырууга умтулат. Демек, атаандаш

$$W_n(y_0)=\max_{y\in Y} G(x(y),y) \qquad (1.6.4)$$

шарты аткарыла тургандай кылып y_0 ду тандайт. Айталы, $Y_0\subset Y$ - бул (1.6.4)-шарты аткарылган мүмкүн болгон бардык y_o дордун көптүгү болсун. Анда $x(\cdot)$ стратегиясынын эффективдүүлүк баасы катары изилдөөчү төмөндөгүнү алышы мүмкүн:

$$W_1=\min_{y\in Y_0} W(Y)=\min_{y\in Y_0} F(x(y),y) \qquad (1.6.5)$$

Мында минимум (1.6.4)-шартын канааттандырган бардык y_0 дордон алынат.

Эгерде башка кошумча маалымат алынса, анда кошумча изилдөөлөр жүргүзүлүп жана (1.6.5)-жыйынтыктын жакшырышы табигый нерсе.

Бул аныксыздык боюнча гарантияланган жыйынтык принцибин колдонуу бардык $y\in Y_0$ тер боюнча минимумду алууну билдирет.

Демек, берилген учурда Y тин ордуна $Y_0\subset Y$ ду алуу сунуш кылынат.

Бирок, (1.6.5)-баасы төмөндөгүлөрдү гарантиялаган учурда гана гарантияланган баа болот:

1) атаандаш (1.6.2) критерийин кармаса;

2) атаандашка $x(\cdot)$ стратегиясы белгилүү болсо;

3) анын (1.6.4)-гө жетүүсүнө эч ким тоскоолдук кылбаса.

Эгерде бул информациялык шарттардын жок дегенде бирөө орун албаса, анда изилдөөчү (1.6.5)-баасын пайдаланбоосу керек; тескери учурда каталыктар келип чыгуусу мүмкүн.

C **абалы.** Айталы (1.6.2)-деги эффективдүүлүк критерийи так эмес белгилүү, ал эми калган шарттар орун алсын. Бул учур төмөндөгүдөй коюлган маселе аркылуу туюнтулушу мүмкүн:

$$G(x,y,a) \to max, \alpha \in [0,1], y \in Y \qquad (1.6.6)$$

мында α -бул $[0,1]$ кесиндисинде өзгөрүүчү анык эмес фактор. Анда конкурент төмөндөгүнү алууга умтулат:

$$\max_{y} G(x(y),y,a) = G(x(y_0(a)),y_0(a),a), y_0(a) \in Y_0(a).$$

Бул учурда $x(y)$ стратегиясынын эффективдүүлүгүнүн гарантияга ээ баасы болуп төмөндөгү эсептелет:

$$\inf_{0 \le a \le 1} \inf_{y \in Y_0} W(y) = \inf_{0 \le a \le 1} \inf_{y \in Y_0} G(x(y),y,a) \qquad (1.6.7)$$

Эгерде (1.6.1)-ни реализациалоочу $\bigcup_{a \in [0,1]} Y_0(a)$ биригүүсү y ти кармап турса, анда (1.6.7)-ни колдонуу жана (1.6.6) маалыматы Y көптүгү боюнча алынган (1.6.1)-ге салыштырмалуу жаңы эч нерсени бербейт. Ал эми бул болсо, А абалына салыштырмалуу кошумча болгон информация С абалында мааниге ээ эмес дегенди билдирет.

D **абалы.** Каршылаштын $x(\cdot)$ стратегиясын билүүсү да мааниге ээ.

Каршылаш операция жүргүзүүчүнүн максатына ээ болгон учурду, б.а.

$$G(x,y) = F(x,y), \forall x \in X, \forall y \in Y \qquad (1.6.8)$$

болгон учурду, карайбыз. Анда экөө тең $\max_{(x,y)} F(x,y)$ ке жетүүгө умтулушат.

Бул максимумга бир нече $(x_z, y_z) \in Z \in X \times Y$ чекиттеринде жетсин жана операция жүргүзүүчүнүн x стратегиясы y тен көз каранды болбосун, б.а. $x(\cdot) = x \in 2^A$ болсун. Ал эми каршылаш бул стратегияны билбесин. Анда каршылаштын тандоосу түшүнүксүз жана эң жакшы учурда x эффективдүүлүгүн төмөндөгүдөй чоңдук көрүнүшүндө гарантиялоого болот:

$$W(x) = \min_{y \in Y_z} F(x,y), Y_z = pr_Y Z \qquad (1.6.9)$$

1.6.1-мисал. $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, F(x,y) = -(x-y)^2$ болсун. Бул болсо, эки жак тең жакындашууга умтулат, бирок жолугушуу чекитин белгилешкен эмес (б.а. бири экинчиси кайда бараарын билбейт) дегенди билдирет. Анда $Y=[0,1]$ үчүн $x=0$ болгондо (1.6.1)-туюнтма (-1) ди жана (1.6.9) да ошону эле берет. Эгерде эки жак бири-биринин тандоосун билсе, анда алар макулдашып $x_0=y_0=0$ болгондо

$$F(x_0,y_0)=G(x_0,y_0)=0$$

го ээ боло алышмак.

Демек, бир максатка умтулуу гана эмес, өз аракеттери (стратегиялары) жөнүндөгү маалыматтарды алмашуу да өтө керек. Антпесе максаттардын бирдиги алардын карама-каршылыгынан эч кандай жакшы натыйжа бербейт. #

Эгерде бир эле убакта (1.6.2)-ни жетишээрлик так билүүгө жана $x(\cdot)$ стратегиясын каршылаш билет деген ишенич жок болсо, анда же конкреттүү изилдөөлөр, же y тин бардык мүмкүн болгон өзгөрүүсүндө (1.6.1)-ге ориентир алуу зарыл.

Согуштук операцияларда же атаандаш экономикада (1.6.2)-ни билүү аз ыктымалдуулукка ээ болгондуктан эффективдүүлүктүн мүмкүн болгон типтүү баасы болуп (1.6.1)-эсептелет:

$$W(x(\cdot))=\inf_{y\in Y} W(y)=\inf_{y\in Y} F(x(y),y) \qquad (1.6.1)$$

Жогоруда айтылгандарды төмөндөгүдөй жалпылоого болот: эгерде каршылаштын максаты белгилүү же алардын $x(\cdot)$ ны билүүсүнө ишенич жок болсо, анда атаандаштын кызыкчылыктарынын карама-каршы учурун эң жаман вариант деп алуу максатка ылайыктуу. Эми каршылашта $x(\cdot)$ жөнүндө маалымат жок экендигине ишенич эмнени бере тургандыгын түшүнүү калат. Мында бардыгы каршылаштын максаты так белгилүү экендигинен көз каранды. Эгерде белгисиз болсо, анда каршылаштын Y көптүгүнөн өз чечимин тандоосу такыр анык эмес болот, ошондуктан (1.6.1)-ни пайдалануу керек.

E **абалы**. Эгерде каршылаш акылдуу жана анын максаты белгилүү болсо, анда $x(\cdot)$ жөнүндө маалымат жок болгон учурда ал y_0 ду төмөндөгүлөрдөн тандай алат:

1) ал y ти кандай кылып тандаса да операция жүргүзүүчүлөр x_0 ду $F(x_0(y),y)=\max_{x(y)} F(x(y),y)$ орун ала тургандай кылып тандайт;

2) y_0 төмөндөгү шарттан тандалат:

$$G(x_0(y),y_0)=\max_{y} G(x_0(y),y_0).$$

Анда, эгерде мындай y_0 дордун көптүгү Y_1 деп белгилесек, анда биздин $x(y)$ стратегиябыздын эффективдүүлүк баасы $\min\limits_{y \in Y_1} F(x(y_0), y_0)$ болот.

Мындан ары $x(y)$ «оптималдуу» стратегиясын тандоодо каршылаштын $x(y)$ жөнүндө маалыматка ээ болушу же ээ болбошу мааниге экендигин аныктоо менен аралаш стратегияларды колдонуу максатка ылайыктуу экендигин көрсөтөбүз.

Бирок, бул учурда да стратегиянын эффективдүүлүгү (1.6.1.) менен бааланат.

Атаандаштар көп жана алардын ар бири маалыматтар алмашылбай жана союз түзбөй (коалиция түзбөй) өз максаттарын көздөшсө, анда жыйынтыктардын жакшыруусун күтүүгө болот. Бирок, бул жыйынтыктар, эреже катары, туруктуу эмес жана гарантиялангандар категориясына кирбей калуулары мүмкүн. Булардын баары коалициалык эмес оюндар теориясындагы Нэштин изилдөөлөрүндө көрсөтүлгөн.

F **абалы**. Көзөмөлдөнбөгөн y кокустук факторлорун карайбыз. y тин кокустук экендигининин өзү (1.6.1)-ге караганда жакшы жыйынтык берүүчү кандайдыр бир маалымат катары эсептелет. Бирок, эгерде эффективдүүлүк критерийи мурдагыдай эле жана Y көптүгү өзгөрбөсө, анда y тин бөлүштүрүү законун билүү эч кандай жаңы гарантияланган жыйынтык бербейт. Чындыгында, (1.6.1)-ни реализациялоочу y тер мүмкүн болгон «эң кичине ыктымалдуулукка ээ» болуп калышат.

Ошондуктан y тин бөлүштүрүү законун билүүдө эффективдүүлүк баасынын пайдасын төмөндөгүдөй эки жол менен алабыз:

1) $p[y \in Y^*] \geq 1 - \beta$, β-жетишээрлик кичине, орун ала тургандай кылып Y көптүгүн Y^* кичине көптүктөрүнө алмаштырабыз. Мында мүмкүн болгон β лар ар бир жолу конкреттүү талкууланат. Ошентип бул учурда баары өзгөрүүсүз калтырылып, болгону (1.6.1)-деги Y ти Y^* га алмаштырабыз:

$$W_* = \inf_{y \in Y^*} W(y) = \inf_{y \in Y^*} F(x(y), y) \qquad (1.6.1')$$

Ал эми гарантияны y тин Y^* нын пределинен чыгусуунун эн кичине ыктымалдуулугу катары түшүнөбүз.

Мындай ыктымалдуу гарантия операциянын кайталануучулугунда чон мааниге ээ.

Экинчи жолу болуп изилдөөнүн башталышында кабыл алынган эффективдүүлүк критерийиндеги өзгөрүү эсептелет. Эреже катары мындай өзгөртүүнү операция изилдөөчү өзү киргизиши мүмкүн эмес.

Эгерде (1.6.1)-баасы жакшы эмес жыйынтык берип жана андан жакшы жыйынтык берүүчү башка стратегия жок болсо, жогорудагыдай өзгөртүүнү кийирүү керек болот.

Эгерде (1.6.1) чи 0 деген бааны берсе, анда мындай абал көбүнчө максаты 1-типте (сапаттык) болгон операцияларда кездешет.

Мында операция жүргүзүүчүлөр же операция жүргүзүүдөн баш тартуусу керек, же эффективдүүлүк критерийин өзгөртүүсү керек.

Көп учурда критерийди өзгөртүүдө аны кокустуктар боюнча ортолоштуруу жүргүзүлөт. Мында критерийге анык риск менен макулдашуу кийрилет. Мындай риск көп эселүү кайталануучу операцияларда толук мүмкүн деп эсептелет.

Жалпы учурда, эгерде көзөмөлдөнбөөчү факторлордун y көптүгү көз каранды эмес $y_1 = \{y_{11},...,y_{1k}\}$ кокустук факторлор векторунан жана анык эмес факторлордун y_2 векторунан турса, анда жаңы критерий төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \overline{F}(x(y_2), y_2) = \\ &= \int\dots\int F(x(y_1, y_2), y_1, y_2) df_1(y_{11}),...,df_k(y_{1k}). \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Мында $f_i(y_{1i})$-бул y_{1i} чондугунун бөлүштүрүү закону. Жаңы критерийдеги эффективдүүлүк баасын төмөндөгүдөй көрсөтүүгө болот:

$$\inf_{y_2} \overline{F}(x(y_2), y_2). \tag{1.6.11}$$

Эгерде $x(y)$ стратегиясы y_2 ден гана көз каранды болсо, анда $\overline{W} = \overline{F}(x(y), y)$ критерийи y_1 ден көз каранды болбойт, башкача айтканда $\overline{F}(x(y_2), y_2)$ көрүнүшүнө ээ болот, бул болсо кокустуксуз модел алынгандыгын билдирет.

Ар дайым төмөндөгү шарт орун алаарын белгилей кетүү керек:

$$\inf_{y_2} \overline{F}(x(y_2), y_2) \geq \inf_{y_1, y_2} F(x(y), y). \qquad (1.6.12)$$

Ошентип, y_1 жөнүндөгү информацияга ээ болуунун жогорулашы (же бөлүштүрүү законун билүү) күтүлүүчү эффективдүүлүктүн анык бир жогорулашына алып келет.

§7. Абсолюттуу оптималдуу жана оптималдуу гарантияланган стратегиялар

$x(\cdot)$ стратегияларынын X көптүгү жана анык эмес факторлордун маанилеринин Y көптүгү берилсин. Эгерде активдүү каршылаштын максаты операция жүргүзүүчүлөр максатына карама-каршы же каршылаштын максаты белгисиз болсо, анда x стратегиясынын эффективдүүлүк баасы гарантияланган жыйынтык прицибинин негизинде төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y). \qquad (1.7.1)$$

Оптималдуу стратегиялардын эки түшүнүгүн кийрели.

1) **1.7.1-аныктоо.** X көптүгүндөгү x_g*-оптималдуу гарантияланган стратегиясы* деп жогоруда көрсөтүлгөн эффективдүүлүк баасынын максимумуна ээ болуучу стратегиясы аталат, б.а

$$\inf_{y \in Y} F(x_g, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = F_g(X). \qquad (1.7.2)$$

Мында операция жүргүзүүчүлөрдүн көз карашы боюнча $F_g(X)$ чоңдугу - бул оптималдуу гарантияланган жыйынтык. Бул аныктоону төмөндөгүдөй айтуу менен алмаштырууга болот: «$F(x_0, y_0) = \max_x \min_y F(x, y)$ шарты орун алган (x_0, y_0) түгөйү - оптималдуу», себеби $\max \min$ чоңдугу $\sup_x \sup_y F(x, y)$ жана $\inf_x \inf_y F(x, y)$ тин ортосунда жайланышат, ошондуктан бул маани оптималдуу гарантияга ээ стратегияга (ОГС) тиешеси жок чексиз көп чекиттерден кабыл алынат.

Мисалга, $F(x,y)=x+y\ (0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$ чондугу үчүн $\max\min=1$ жана жалгыз гана $x_g=1$. Ошол эле убакытта тиешелеш келген xтер ОГС болбосо да, $x+y=1$ теңдемесин канааттандыруучу бардык түгөйлөр функциянын максимин беришет.

Эгерде $\inf\limits_{y\in Y} F(x,y)$ функциясы $x\in X$ боюнча жогорку граны $F_g(X)$ ка бир да x_0 чекитинде ээ болбосо, анда оптималдуу гарантияга ээ стратегия жок. Бирок, мында $\forall\varepsilon>0$ үчүн төмөндөгү барабарсыздыкты канааттандыруучу x_ε-оптималдуу гарантияга ээ стратегиялар (ε-ОГС деп аталуучу) ар дайым жашайт:

$$\inf_{y\in Y} F(\chi_\varepsilon, y)\ge \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y)-\varepsilon \stackrel{\Delta}{=} F_g(X)-\varepsilon \qquad (1.7.3)$$

2) **1.7.2-аныктоо.** $F(x_a,y)\ge F(x,y),\ \forall x\in X, \forall y\in Y$ (1.7.4)
шарты орун алган $x_a\in X$ стратегиясы *абсолюттуу оптималдуу стратегия* деп аталат.

(1.7.4)-шартты төмөндөгүдөй жазууга да болот:

$$F(x_a,y)=\max_{x\in X} F(x,y), \forall y\in Y \qquad (1.7.5)$$

1.7.3-аныктоо. $F(x_a^\varepsilon, y)\ge \sup\limits_{x\in X} F(x,y)-\varepsilon, \forall y\in Y$ (1.7.6)

шарты орун алган $x_a^\varepsilon\in X$ стратегиясын *ε -абсолюттуу оптималдуу стратегия* деп түшүнөбүз.

x_a жашасын. Анда (1.7.4)-дөн:

$$\inf_{y\in Y} F(x_a,y)\ge \inf_{y\in Y} F(x,y), \forall x\in X$$

Мындан

$$\inf_{y\in Y} F(x_a,y)=\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y)=F_g(X).$$

Ошентип, абсолюттуу оптималдуу стратегия (эгерде жашаса) жөн эле оптималдуу гарантияга ээ стратегия болот. Буга анологиялуу эле сүйлөм ε-оптималдуу стратегия үчүн орун алат.

Демек, бардык оптималдуу гарантияга ээ стратегияларды издөөдө биз абсолюттуу оптималдуу стратегияларды да издейбиз.

1.7.4-мисал. Жетишээрлик кичине ε үчүн ε абсолюттуу оптималдуу стратегия жашабаган учурду карайбыз. Айталы, $X=Y=[-1,1]$ үчүн $F(x,y)=x\cdot y$ болсун.

а) $x_g = 0$ экендигин көрсөтөбүз. Бул үчүн эң жакшы гарантияга ээ $\max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x, y)$ жыйынтыгын эсептейбиз.

1) Эгерде $x \neq 0$ болсо, анда $y = y(x) = -signx$ болот. Анда эффективдүүлүк баасы $\inf\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y(x)) = -|x| < 0.$

2) $x = 0$ болсун. Анда $\forall y : F(x, y) = 0.$ Мындан

$$\inf_{y \in Y} F(x, y) = 0 \overset{1)}{\Rightarrow} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = 0, x_g = 0.$$

б) $\varepsilon < 1$ болгондо ε-абсолюттуу оптималдуу стратегиянын жашабай тургандыгын көрсөтөбүз. Чындыгында, $\forall x \neq 0$ болсо, анда $y = y(x) = -signx.$ Төмөндөгүдөй деп эсептейли:

$$\tilde{x} = y(x) = \tilde{x}(x), F(\tilde{x}(x), y(x)) = 1.$$

$$F(x, y(x)) = x \cdot y(x) = -|x| < 0 = 1 - 1 = \tilde{x} \cdot y(x) - 1 =$$
$$= F(\tilde{x}, y(x)) - 1 < F(\tilde{x}, y(x)) - \varepsilon \leq \sup_{x \in X} F(x, y(x)) - \varepsilon.$$

Бул болсо

$$\forall x \neq 0, \exists y(x) \in Y : F(x, y(x)) < \sup_{x \in X} F(x, y(x)) - \varepsilon$$

экендигин, башкача айтканда 1.7.3 аныктоо боюнча ε-абсолюттуу оптималдуу стратегиянын жашабай тургандыгын билдирет. #

Ошентип, $x \in X, x \neq 0$ үчүн $0 < \varepsilon < 1$ болгондо ε-абсолюттуу оптималдуу стратегия жашабайт.

$x \neq 0$ үчүн $\forall \varepsilon < 1 : F(0, y(x)) = 0 < F(\tilde{x}, y(x)) - \varepsilon \leq \sup\limits_{x \in X} F(x, y(x)) - \varepsilon$ болгондуктан $x_g = 0$ да ε-абсолюттуу оптималдуу болушу мүмкүн эмес.

Демек, дагы бир жолу кайталайбыз: ε-абсолюттуу оптималдуу стратегиялардын жашашы да - X, Y компакттуу көптүктөрү жана эффективдүүлүктүн үзгүлтүксүз критерийи берилген учурда сейрек кездешүүчү абал.

Бирок, эгерде абсолюттуу оптималдуу стратегиялар (АОС) жашаса, анда эффективдүүлүк критерийин өзгөртүү менен оптималдуу гарантияланган стратегияга ээ болгон операцияны алуу жеңил болот.

Бул үчүн төмөндөгү критерийди кийрүү жетиштүү:

$$F_a(x,y) = F(x,y) - \sup_{x\in X} F(x,y) \qquad (1.7.7)$$

Ар дайым $F_a(x,y) \le 0$ болгондуктан,

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F_a(x,y) \le 0 \qquad (1.7.8)$$

орун алат. Экинчи жактан

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} F_a(x,y) \overset{\Delta}{=} \min_{y\in Y}\sup_{x\in X}[F(x,y) - \sup_{x\in X} F(x,y)] = \min_{y\in Y}[0] = 0 \qquad (1.7.9)$$

1.7.5-лемма. 1) Эгерде x_a-бул $F(x,y)$ критерийи үчүн АОС болсо, анда ал $F_a(x,y)$ үчүн оптималдуу гарантияланган жана

$$\inf_{y\in Y} F_a(x_a,y) = \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F_a(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F_a(x,y) = 0 \qquad (1.7.10)$$

орун алат.

2) Тескерисинче, эгерде

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F_a(x_a,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F_a(x,y) = 0 \qquad (1.7.11)$$

барабардыгы орун алса, анда $F_a(x,y)$ үчүн оптималдуу гарантияланган каалагандай стратегия $F(x,y)$ үчүн АОС болот.

Далилдөө. 1) x_a-бул $F(x,y)$ үчүн АОС болсун, башкача айтканда

$$F(x_a,y) = \max_{x\in X} F(x,y), \forall y \in Y \qquad (1.7.5)$$

орун алсын. Ошондуктан

$$F_a(x_a,y) \overset{\Delta}{=} F(x_a,y) - \sup_{x\in X} F(x,y) = 0, \forall y \in Y.$$

Анда

$$0 = \inf_{y\in Y} F_a(x_a,y) \overset{(1.7.8)}{=} \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F_a(x,y) = 0 \overset{(1.7.9)}{=} \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} F_a(x,y).$$

Демек (1.7.10) -далилденди.

2) x_a-бул $F(x,y)$ үчүн оптималдуу гарантияланган стратегия болсун жана (1.7.11)-орун алсын. Анда аныктоо боюнча төмөндөгүгө ээ болобуз:

$F_a(x,y) \le 0, \forall x \in X, \forall y \in Y.$

Анда

$$F_a(x_a, y) \le 0, \forall y \in Y \qquad (1.7.12)$$

x_a-оптималдуу гарантияланган стратегия болгондуктан (1.7.11)-ден

$$\inf_{y \in Y} F_a(x_a, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F_a(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F_a(x, y) = 0$$

келип чыгат.

$$\forall y \in Y : \inf_{y \in Y} F_a(x_a, y) = 0$$

болгондуктан (1.7.12)-ден $F_a(x_a, y) = 0, \forall y \in Y$ келип чыгат.

Бул учурда (1.7.7)-ден

$$F(x_a, y) = \sup_{x \in X} F(x, y), \forall y \in Y$$

келип чыгат. Бул болсо $F(x, y)$ үчүн x_a абсолюттуу оптималдуу боло тургандыгын билдирет. #

§ 8. Мисалдарды чыгаруу

1.2.2-мисал (Көпүрө куруу)

Тегеректин борбору менен дал келбеген жана AB диаметринде жайланышкан x чекитин карайбыз. Тегеректин эки жарым бөлүгүнөн эки чекит табылып, алардан берилген чекитке чейинки аралыктардын суммасы R ден чоң болоору белгилүү. Бул болсо F үчүн төмөндөгү орун алаарын билдирет:

$$F(x, y) = \rho(y_1, x) + \rho(y_2, x),$$

$$\sup_{y=(y_1, y_2)} F(x, y) > 2R,$$

б.а. x стратегиясынын эффективдүүлүгүнүн гарантияланган баасы $2R$ ден чоң болот.

Ал эми шаардын борборунда көпүрө куруу стратегиясынын гарантияланган баасы $2R$ ге барабар, башкача айтканда

$$\sup_{y=(y_1, y_2)} F(x, y) = 2R.$$

Демек, бул стратегия оптималдуу гарантияланган болуп эсептелет. #

мында $q_i x_i - c_i \le 0, q_i x_i - c_i - z_i \le 0$ болгондуктан,

$$W_g(x) = \min_{z \in Z} \sum_{i=1}^{k} (q_i x_i - c_i - z_i) = \sum_{i=1}^{k} q_i x_i - \max_{z \in Z} \sum_{i=1}^{k} z_i - \sum_{i=1}^{k} c_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} q_i x_i - (b - \sum_{i=1}^{k} c_i) - \sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} q_i x_i - b.$$

Ошентип, ОГС ти табуу үчүн төмөндөгү маселеге ээ болобуз:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} q_i x_i \uparrow max \\ &\sum_{i=1}^{k} x_i \le a, x_i \le \frac{c_i}{q_i} \end{aligned}\right\} \qquad (1.8.5)$$

Бул маселени чечүү үчүн бардык түрдөгү товарлар $q_1 \ge q_2 \ge ... \ge q_k$ (1.8.6) тартибинде номерленген деп эсептейбиз. Демек, товардын номери канчалык чоң болгон сайын сырье бирдигинен өндүрүлүүчү $i\ (i - 1,...,k)$ продукциясы ошончолук көп алынат.

Мындан сырткары $1 < m < k$ номери төмөндөгү шарт менен аныкталсын:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{q_i} \le a < \sum_{i=1}^{m+1} \frac{c_i}{q_i}.$$

Мындай m бир маанилүү аныкталат. Анда x^g ОГС сы (1.8.5) – маселесинин чечими болот жана ошондуктан

$$\left.\begin{aligned} &x_i^g = \frac{c_i}{q_i}; i = 1,...,m; x_{m+1}^g = a - \sum_{i=1}^{R} c_i q_i \\ &x_i^g = 0, i = i_0 + 1,...,k. \end{aligned}\right\} \qquad (1.8.7)$$

Бул болсо бардык сырьелордун өндүрүлгөн товарлар бирдиги сырье бирдигинен көп болгон товарларга чачыла тургандыгын билдирет.

Эгерде q_i деп өндүрүлгөн товарлардын санын эмес, товар бирдигинен алынган пайданы алсак, анда (1.8.5)-маселеси пайданы максималдаштыруу маанисине ээ болмок.

Бул учурда эң жакшы (максималдуу) гарантияланган жыйынтык төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$ЭГЖ = \sum_{i=1}^{m} c_i + q_{m+1}(a - \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{q_i}) - b < 0.$$

2) Эми бардык товарлардын түрүнө болгон минималдуу керектөө канаатандырылсын (сырье жетиштүү болсун), башкача айтканда $a \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{q_i}$ болсун.

Мурдагы учур сыяктуу эле ОГС үчүн төмөндөгү барабарчыздыктар ((1.8.3) нүн тескериси) орун алаарын көрсөтүүгө болот:

$$x_i^g > \frac{c_i}{q_i}; i = 1,...,k \qquad (1.8.9)$$

Мында (1.8.9)-шарты оптималдуу гарантияланган баа үчүн зарылдык гана шарт болуп эсептелет. (1.8.9)-ну канаатандырган стратегиялардын эффективдүүлүгүнүн гарантияланган баасы төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$W_g(x) = \min_{1 \leq i \leq k} [\min\{0, q_i x_i - c_i - d\}].$$

Мындан ОГС нын

$$q_i x_i^g - c_i = const \qquad (1.8.11)$$

шартын үзгүлтүксүз канааттандыра тургандыгын көрсөтүүгө болот. Бул шарт зарылдык жана жетиштүүлүк шарты болуп эсептелет .

Эми төмөндөгүнү далилдөөгө болот:

$$x_i^g = \frac{c_i}{q_i} + \frac{a - \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{q_j}}{q_i \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{q_j}} \qquad (1.8.12)$$

Мында моделдин параметрлеринин практикалык маанисине көнүл буруу керек.

Оптималдуу гарантияланган жыйынтык төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$W_g^0 = \min\{0; \frac{a - \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{q_j}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{q_j}} - d\} \leq 0 \qquad (1.8.13)$$

Ошентип, эгерде

$$a \geq d\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{q_i}$$

орун алса, анда товарга болгон бардык керектөөлөрдүн камсыздалышын гарантиялоого $(W_g^0 = 0)$ болот. #

Экинчи бөлүм

АНТАГОНИСТИКАЛЫК ОЮНДАР

§1. Ээр сымал чекиттер

Төмөндөгү үчтүктү алабыз:

$\Gamma = \{F, X, Y\}$ (2.1.1).

(2.1.1) үчтүгү менен сүрөттөлгөн Γ антагонистикалык оюнун карайбыз.

$F(x,y)$ эффективдүүлүк критерийинен четтөө бир дагы оюнчу үчүн пайдалуу болбогон абал антагонистикалык оюнда оптималдуу деп эсептелинет. Алгач ар бир оюнчу үчүн ыңгайлуу болгон абал түшүнүгүн аныктайбыз.

2.1.1-аныктоо. Эгерде

$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*), \forall x \in X$ (2.1.2)

шарты орун алса, анда (2.1.1)-антагонистикалык оюнундагы (x^*, y^*) абалы 1-оюнчу үчүн *ыңгайлуу* деп аталат.

Аналогиялуу түрдө эле, эгерде

$F(x^*, y^*) \le F(x^*, y), \forall y \in Y$

шарты орун алса, анда (x^*, y^*) абалы 2-оюнчу үчүн ыңгайлуу деп аталат.

Биринчи жана экинчи оюнчулар үчүн ыңгайлуу болгон абалдарды тиешелеш түрдө $C_1(\Gamma)$ жана $C_2(\Gamma)$ деп белгилейбиз.

2.1.2-аныктоо. Γ антагонистикалык оюнундагы (x^*, y^*) абалы *тең салмактуу абал (тең салмактуулук абалы, оюндун ээр сымал чекити)* деп аталат, эгерде ал ар бир оюнчу үчүн ыңгайлуу болсо; башкача айтканда төмөндөгү барабарсыздыктар туура болсо:

$$\forall x \in X,\ F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y), \forall y \in Y \qquad (2.1.4)$$

Γ оюнунун бардык тең салмактуулук абалдарынын көптүгүн $C(\Gamma)$ деп белгилейбиз. Аныктоо боюнча $C(\Gamma) = C_1(\Gamma) \cap C_2(\Gamma)$.

(2.1.4) формуласы F функциясынын (x^*, y^*) чекитиндеги төмөндөгүдөй касиетин билдирет: x өзгөрүлмөсүнүн маанисинин каалагандай өзгөрүүсүндө F функциясынын мааниси кичирейет (бул биринчи оюнчу үчүн пайдасыз), ал эми y маанисинин өзгөрүүсүндө F мааниси чоңойот (бул экинчи оюнчу үчүн пайдасыз).

Γ антагонистикалык оюнунун бардык тең салмактуулук абалдарынын $C(\Gamma)$ көптүгү эки негизги касиетке ээ.

2.1.3-теорема. Γ антагонистикалык оюнунда эки түрдүү тең салмактуулук абалдары болсун: $(x^*, y^*), (x^0, y^0) \in C(\Gamma)$.

Анда

$$i)\ F(x^*, y^*) = F(x^0, y^0); \qquad (2.1.5)$$

$$ii)\ (x^*, y^0), (x^0, y^*) \in C(\Gamma). \qquad (2.1.6)$$

Далилдөө. i) $\forall x \in X, \forall y \in Y$ үчүн тең салмактуулук абалдын аныктоосу боюнча

$$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y), \qquad (2.1.7)$$

$$F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y). \qquad (2.1.8)$$

(2.1.7) жана (2.1.8) барабарсыздыктары каалагандай x жана y үчүн орун алгандыктан жогорудагы барабарсыздыктардан төмөндөгү келип чыгат:

$$F(x^0, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y^0),$$

$$F(x^*, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y^*).$$

Бул барабарсыздыктарды бириктирсек төмөндөгү келип чыгат:

$$F(x^0, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y^*).$$

Мындан барабарсыздыктардын барабардыктарга айлана тургандыгына ээ болобуз.

$$F(x^0, y^*) = F(x^*, y^*) = F(x^*, y^0) = F(x^0, y^0) = F(x^0, y^*). \qquad (2.1.9)$$

Ошентип, (2.1.5)-далилденди.

ii) (2.1.7), (2.1.8) жана (2.1.9)-дан $\forall x \in X, \forall y \in Y$ үчүн төмөндөгү орун алат:

$$F(x, y^*) \le F(x^0, y^*) \le F(x^0, y),$$

$$F(x,y^0) \le F(x^*,y^0) \le F(x^*,y). \ \#$$

(2.1.5)-барабардыгы менен туюнтулган бул теоремадагы биринчи касиетти кээ бир учурларда тең салмактуулук абалынын бирдей баалуулугу деп атайбыз.

Γ оюнунун бардык тең салмактуулук абалдарынын $C(\Gamma)$ көптүгүндөгү утуш функциясынын жалпы мааниси – бул Γ оюнундагы 1-оюнчунун утуш (2-оюнчунун утулуш) эрежелери катары эсептелет. Ошондуктан ал *Γ оюнунун мааниси* деп аталат жана $v(\Gamma)$ деп белгиленет.

Тең салмактуулук абалынын бирдей баалуулугу касиети үчүн төмөндөгү орун ала тургандыгын белгилеп кетебиз:

$$\{(x^*,y^*) \in C(\Gamma), (x,y) \in X \times Y, F(x,y) = F(x^*,y^*)\} \not\Rightarrow (x,y) \in C(\Gamma)$$

Мисалга, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ матрицалык оюнунда жогорку сол бурч –ээр сымал чекит болот, ал эми төмөнкү оң бурч ээр сымал чекит болбойт.

2.1.1-теоремадагы ээр сымал чекиттин экинчи касиети төмөндөгүдөй талкуулоолорго негиз түзөт.

$C(\Gamma) \subset X \times Y$ экендиги белгилүү. $C(\Gamma)$ көптүгүнүн X жана Y көптүктөрүндөгү проекцияларын тиешелеш түрдө X_* жана Y_* менен белгилейли, б.а.

$$X_* = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x,y) \in C(\Gamma)\} = pr_X C(\Gamma),$$

$$Y_* = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x,y) \in C(\Gamma)\} = pr_Y C(\Gamma).$$

2.1.4-аныктоо. X_* жана Y_* көптүктөрүн тиешелеш келген оюнчулар үчүн *оптималдуу стратегиялар көптүктөрү* деп атайбыз.

$C(\Gamma) \subset X_* \times Y_*$ экендиги белгилүү. Тескери камтылуунун орун алаарын текшеребиз. $(x^*,y^0) \in X_* \times Y_*$ болсун. Анда аныктоо боюнча $\exists y^* \in Y^*$ табылып, $(x^*,y^*) \in C(\Gamma)$ жана $(x^0,y^0) \in C(\Gamma)$ болот. Мындан 2.1.1-теорема боюнча $(x^*,y^0) \in C(\Gamma)$. Анда $C(\Gamma) \supset X_* \times Y_*$. Акырында төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$C(\Gamma) \subset X_* \times Y_* = pr_X C(\Gamma) \times pr_Y C(\Gamma).$$

Көптүктү мындай түрдө көрсөтүү мүмкүндүгү анын *тик бурчтуулугу* деп аталат.

Антагонистикалык оюндун бардык тең салмактуулук абалдарынын көптүгүнүн тик бурчтуулугу - бул оюндагы оюнчулардын оптималдуу стратегияларынын каалагандай түгөйү тең салмактуулук абалын түзө тургандыгын билдирет. Башкача айтканда, $C(\Gamma)$ көптүгүнүн тик бурчтуулугу бул оптималдуу стратегияларды өз ара алмашууга мүмкүн экендигин билдирет: тең салмактуулук абалында оюнчулур андагы оптималдуу стратегияларды өздөрүнүн каалагандай оптималдуу стратегияларына алмаштыра алышат; мында тең салмактуулук абалы да, абалдагы оюнчунун утуштары да өзгөрбөйт.

Мисал катары $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 100 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ матрицалык оюнун карайбыз. Бул оюнда бардык төрт бурчтук абал тең ээр сымал чекит болуп эсептелет .

§2. Тең салмактуулук абалдары жана оптималдуу гарантияга ээ стратегиялар

Антагонистикалык оюндагы гарантияга ээ оптималдуулукка умтулуу оюнчулардын ээр сымал чекиттеги умтулуусуна тең күчтүү болду. Теореманын баяндамасын берүүдөн мурда жардамчы жыйынтыктарды далилдейбиз.

2.2.1-лемма. $\Phi(x,y), x\in X, y\in Y$ функциясы берилсин. Анда төмөндөгүдөй барабарсыздыктар орун алат:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in x}\Phi(x,y)\le \inf_{y\in y}\sup_{x\in X}\Phi(x,y) \qquad (2.2.1)$$

Далилдөө. Накта төмөнкү грандын аныктоосу боюнча:

$$\inf_{y\in Y}\Phi(x,y)\le\Phi(x,y), \forall x\in X, \forall y\in Y.$$

$g(x)=\inf\limits_{y\in Y}\Phi(x,y)$ деп белгилесек, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\sup_{x\in X} g(x)\overset{\Delta}{=}\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\Phi(x,y)\le\sup_{x\in X}\Phi(x,y), \forall y\in Y.$$

Демек,

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\Phi(x,y)\le\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}\Phi(x,y).$$

Лемма далилденди. #

2.2.2-теорема. $F(x,y)$ функциясынын $X\times Y$ көптүгүндө ээр сымал чекитке ээ болушу үчүн ($C(\Gamma)\neq\emptyset$) төмөндөгү шарттардын орун алышы зарыл жана жетиштүү:

а) $$ЭГЖ1\overset{\Delta}{=}\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x,y),\; ЭГЖ2\overset{\Delta}{=}\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y); \qquad (2.2.2)$$

чоңдуктары жашаса;

б) $$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x,y)=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y) \qquad (2.2.3)$$

барабардыгы орун алса.

Далилдөө. 1) *Зарылдык шарты.* Тең салмактуулук абалынын көптүгү $C(\Gamma)\neq\emptyset$ жана $(x^*,y^*)\in C(\Gamma)$ болсун, башкача айтканда

$$\forall x\in X,\forall y\in Y: F(x,y^*)\le F(x^*,y^*)\le F(x^*,y). \qquad (2.2.4)$$

орун алсын.

Сол жаккы барабарсыздыктан $\sup_{x\in X}F(x,y^*)\le F(x^*,y^*)$ келип чыгат жана

$$\inf_{y\in y}\sup_{x\in X}F(x,y)\le\sup_{x\in X}F(x,y^*)\le F(x^*,y^*) \qquad (2.2.5)$$

орун алат.

Ушундай эле талкуулап, (2.2.4)-нүн оң жагынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$F(x^*,y^*)\le\inf_{y\in Y}F(x^*,y)\le\sup_{x\in X}\inf_{y\in X}F(x,y). \qquad (2.2.6)$$

Ошентип,

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y)\le\sup_{x\in X}\inf_{y\in y}F(x,y).$$

Бирок, 2.2.1-лемма боюнча карама-каршы барабарсыздыктар орун алат.

Анда,

$$\begin{aligned}&\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y)=\sup_{x\in X}\inf_{y\in y}F(x,y)=\\&=F(x^*,y^*)=\sup_{x\in X}F(x,y^*)=\inf_{y\in Y}F(x^*,y)\end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

Мындагы sup жана inf ду тиешелеш түрдө max жана minга алмаштырсак, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$v(\Gamma)=F(x^*,y^*)=\inf_{y\in Y}F(x^*,y)=\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x,y) \qquad (2.2.8)$$

$$v(\Gamma)=\sup_{x\in X}F(x,y^*)=\min_{y\in y}\sup_{x\in x}F(x,y). \qquad (2.2.9)$$

Демек, (2.2.2) жана (2.2.3) катыштар далилденди.

2) *Жетиштүүлүк шарты.* Эми (2.2.2)–эң жакшы гарантияланган жыйынтыктары жашасын жана барабар болушсун, башкача айтканда (2.2.3) орун алсын.

Айталы, төмөнкүдөй болсун:

$$x^*\in X:\inf_{y\in y}F(x^*,y)=\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x,y) \qquad (2.2.10)$$

$$y^*\in Y:\sup_{x\in X}F(x,y^*)=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y) \qquad (2.2.11)$$

Мындан сырткары

$$\inf_{y\in Y}F(x^*,y)\le F(x^*,y^*);$$

$$F(x^*,y^*)\le\sup_{x\in X}F(x,y^*)$$

орун алат.

Мындан тиешелеш түрдө төмөндөгү келип чыгат:

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x,y)=\inf_{y\in Y}F(x^*,y)\le F(x^*,y^*), \qquad (2.2.12)$$

$$F(x^*,y^*)\le\sup_{x\in X}F(x,y^*)=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y). \qquad (2.2.13)$$

(2.2.3) барабардыгын эске алсак, (2.2.12) жана (2.2.13)-дөгү бардык салыштырылуучу чоңдуктар өз ара барабар болушат. Жеке учурда

$$F(x^*,y^*)=\sup_{x\in X}F(x,y^*)\ge F(x,y^*),\forall x\in X,$$

$$F(x^*,y^*)=\inf_{y\in Y}F(x^*,y)\le F(x^*,y),\forall y\in Y.$$

Бул болсо, $(x^*,y^*)\in C(\Gamma)$ экендигин билдирет. #

2.2.3-натыйжа. Ээр сымал чекиттин компонентасы катары (2.2.2) ЭГЖ да ички экстремумга ээ болуучу бири-биринен көз карандысыз түрдө алынган каалагандай x^* жана y^* ны эсептөөгө болот.

Бул натыйжа жогорку теореманы далилдөөдө келип чыкты. Ушул эле жыйынтыкты теоретикалык-оюндук терминологияда төмөндөгүдөй жазууга болот.

Эгерде F функциясы менен берилген оюн ээр сымал чекитке ээ болсо, анда

а) 1-оюнчу ЭГЖ дагы сырткы максимумга $(\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y))$ 1-оюнчунун оптималдуу стратегияларында жетишет;

б) 2-оюнчу ЭГЖ дагы сырткы минимумга $(\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} F(x,y))$ 2-оюнчунун оптималдуу стратегияларында жетишет;

Демек, эгерде биринчи жана экинчи оюнчулардын эң жакшы гарантияланган жыйынтыктарынын маанилери барабар болушса, анда ЭГЖ дын жалпы мааниси оюндун маанисине барабар болот.

Ошондуктан, тең салмактуулук абалына ээ болгон оюндун жүрүшү алдын-ала аныкталган болот: ал оюнчулар жүргүзгөн анализдин ыкмасынан, жолунан же оюнчулардын бири-бири жөнүндө маалыматка ээ болушунан көз каранды эмес, ал эми X,Y жана $F(x,y)$ тин берилиши же оюндун шартынан гана көз каранды болот.

Бул болсо, ээр сымал чекитке ээ болгон (же жок дегенде (2.2.3)-барабардыгы аткарылган) оюндарды толук аныкталган (алдын-ала аныкталган) деп атоого негиз берет.

2.2.3-натыйжанын айрым жалпыланышы төмөнкүдөй жыйынтык берет.

2.2.4-теорема. Эки оюнчу үчүн тең оптималдуу гарантияланган стратегиялар жашасын, б.а.

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y)=\inf_{y\in Y} F(x_{max},y). \qquad (2.2.14)$$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(x,y)=\sup_{x\in X} F(x,y_{mni}). \qquad (2.2.15)$$

орундалсын.

Анда

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y)\le F(x_{max},y_{min})\le \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} F(x,y). \qquad (2.2.16)$$

Далилдөө. (2.2.14) боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y)=\inf_{y\in Y} F(x_{max},y)\le F(x_{max},y_{min}),$$

б.а. (2.2.16)-нын сол барабарсыздыгы келип чыгат. Ал эми оң барабарсыздык (2.2.15)-нин жардамында аналогиялуу түрдө эле далилденет. #

Демек, эгерде $C(\Gamma)\neq\emptyset$ болсо, анда 1-оюнчу тарабынан оптималдуу гарантияланган стратегияны тандоосу 2-оюнчунун аракетинен көз карандысыз түрдө, 1-оюнчу үчүн оюндун мааниси $v(\Gamma)$ дан аз эмес утуш алып келет.

Ошондой эле 2-оюнчунун оптималдуу стратегияны тандоосу 2-оюнчуга оюндун маанисинен чоң эмес зыян келтирет.

Анда, ар бир оюнчу өзүнүн оптималдуу стратегиясын тандоосун каршылашынан жашыруунун зарылдыгы жок.

§3. Томпок-компакттуу оюндардагы тең салмактуулук абалынын жашашы

2.3.1-аныктоо. $\Gamma=\{F,X,Y\}$ антагонистикалык оюну *томпок* деп аталат, эгерде төмөндөгү шарттар орун алса:

а) $X\subset R^m$ жана $Y\subset R^n$ көптүктөрү томпок болушса;

б) $\forall y\in Y$ үчүн $F(\cdot,y):x\in X\to R$ функционалы $x\in X$ боюнча иймек болсо;

с) $\forall x\in X$ үчүн $F(x,\cdot):y\in Y\to R$ функционалы $y\in Y$ боюнча томпок болсо.

2.3.2-аныктоо. Эгерде $\Gamma=\{F,X,Y\}$ антагонистикалык оюну үчүн:

а) $X\subset R^m$ жана $Y\subset R^n$ компакттар болушса;

б) $F:X\times Y\to R$ чагылтуусу ар бир өзгөрүлмө боюнча үзгүлтүксүз болсо, анда бул оюн *компакттуу* деп аталат.

2.3.3-аныктоо. $\Gamma=\{F,X,Y\}$ антагонистикалык оюну *томпок-компакттуу* деп аталат, эгерде ал бир эле убакытта томпок жана компакттуу болсо.

Акыркы аныктоону канаатандырган антагонистикалык оюнда тең салмактуулук абалы жашайт.

2.3.4-теорема. $\Gamma=\{F,X,Y\}$ антагонистикалык оюну томпок-компакттуу болсун. Анда бул оюнда тең салмактуулук абалы жашайт.

Далилдөө. 1) Алгач $F(x,y)$ функционалы y боюнча тапатак томпок деп эсептейли.

а) $F(x,y)$ функционалы $y\in Y$ боюнча үзгүлтүксүз, ал эми Y-компакт болсо, анда $\forall x\in X\,\exists y(x)\in Y$ үчүн

$$F(x,y(x))=\min_{y\in Y}F(x,y)\stackrel{\Delta}{=}m(x) \qquad (2.3.1)$$

орун алат.

Мында $F(x,\cdot):y\in Y\to R$ функционалынын тапатак томпоктугун эске алсак, анда $y(x)$ вектору бир маанилүү аныкталат. Чындыгында, эгерде $y_1(x)\neq y_2(x)$ эки чекити жашаса, анда $\lambda\in]0,1[$ болгондо тапатак томпоктуулуктун аныктоосун пайдаланып төмөндөгүнү жазууга болот:

$$F(x,\lambda y_1(x)+(1-\lambda)y_2(x))<\lambda F(x,y_1(x))+(1-\lambda)F(x,y_2(x))=m(x).$$

Бул болсо, (2.3.1)-деги $m(x)$тин аныкталышына карама-каршы келет.

б) $y(\cdot):X\to Y$ чагылтуусунун үзгүлтүксүздүгүн көрсөтөбүз. $\{x^k\}\subset X, x^k\to x^0, \{y(x^k)\}\subset Y$ удаалаштыктарын карайбыз. Анда F функционалынын үзгүлтүксүздүгүнөн төмөндөгү келип чыгат:

$$\{\left\|y(x^s)-\hat{y}\right\|\to 0\}\Rightarrow\{\left|F(x,y(x^s))-F(x,\hat{y})\right|\to 0.$$

Бул болсо жыйналуучулуктун аныктоосу боюнча

$$F(x^s,y(x^s))\to F(x_0,\hat{y})$$

дегенди билдирет.

$y(\cdot)$ тин аныктоосу боюнча

$$F(x^k,y(x^k))\leq F(x^k,y),\forall y\in Y,\forall k=1,2,\dots .$$

Мындан $s\to+\infty$ пределге өтсөк,

$$F(x_0,\hat{y})\leq F(x_0,y),\forall y\in Y.$$

Анда

$$F(x_0,\hat{y})=\min_y\{F(x_0,y)\mid y\in Y\}.$$

$y(\cdot)$ тин аныктоосунун бир маанилүүлүгүн эске алсак, $\hat{y}=y(x_0)$ болот. Демек, $y(x^s)\to y(x_0)$, бул болсо $\{x^k\}$ нын туруктуулугун эске алсак $y(\cdot)$ чагылтуусунун үзгүлтүксүз экендигин билдирет.

с) $m(x)=F(x,y(x))$ функциясынын үзгүлтүксүздүгү F тин x жана y боюнча үзгүлтүксүздүгүнөн, $y(x)$ тин үзгүлтүксүздүгүнөн жана үзгүлтүксүз чагылтуулардын суперпозициясы жөнүндөгү теоремадан келип чыгат.

d) Вейерштрасстын теоремасы боюнча $\exists x^*\in X$ табылып, $m(\cdot)$ үзгүлтүксүз функциясы жогорку гранга ээ болот, б.а.

$$m(x^*)=\max_{x\in X}m(x)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}F(x,y). \qquad (2.3.2)$$

е) $x\to F(x,y),\forall y\in Y,\forall x\in X$ чагылтуусунун x боюнча ийметигинин негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned}F((1-\alpha)x^*+\alpha x,y)&\geq(1-\alpha)F(x^*,y)+\alpha F(x,y)\geq\\ &\geq(1-\alpha)F(x^*,y(x^*))+\alpha F(x,y)= \qquad (2.3.3)\\ &=(1-\alpha)m(x^*)+\alpha F(x,y),\forall\alpha\in]0,1[.\end{aligned}$$

$x_\alpha = (1-\alpha)x^* + \alpha x, y_\alpha = y(x_\alpha)$ деп алабыз. Анда $y = y_\alpha$ болгондо (2.3.3)-дөн төмөндөгү келип чыгат:

$$F(x_\alpha, y_\alpha) = m(x_\alpha) \geq (1-\alpha)m(x^*) + \alpha F(x, y_\alpha), \forall \alpha \in]0,1[. \quad (2.3.4)$$

Бирок, (2.3.2)-ден жеке учурда $m(x^*) \geq m(x_\alpha)$ келип чыккандыктан, (2.3.4)-дөн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(1-\alpha)m(x^*) + \alpha F(x, y_\alpha) \leq m(x_\alpha) \leq m(x^*) = (1-\alpha)m(x^*) + \alpha m(x^*).$$

Мындан $\alpha > 0$ болгондо $\forall x \in X$:

$$F(x, y_\alpha) \leq m(x^*) = F(x^*, y(x^*)). \quad (2.3.5)$$

Эми $\alpha \downarrow 0$ болсун. Анда $y(\cdot)$ чагылтуусунун үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде

$$x_\alpha \overset{\Delta}{=} x^* + \alpha(x - x^*) \to x^*, y_\alpha = y(x_\alpha) \to y(x^*).$$

Ошондуктан (2.3.5)-ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\forall x \in X : F(x, y(x^*)) \leq F(x^*, y(x^*)). \quad (2.3.6)$$

$y^* = y(x^*)$ деп белгилейбиз. Анда (2.3.6) жана $y(x^*)$ тин аныктоосу боюнча

$$F(x, y^*) \overset{(2.3.6)}{\leq} F(x^*, y^*) \leq F(x^*, y), \forall x \in X, \forall y \in Y. \quad (2.3.7)$$

Ошентип, $(x^*, y^*) \in C(\Gamma) \neq \emptyset$.

2) y боюнча тапатак томпоктуулук талабынан арылуу калды. Эгерде $F(x,y)$ функционалы y боюнча жөн эле томпок болсо, анда жаңы

$$\Gamma_\varepsilon = \{X, Y, F_\varepsilon\}, F_\varepsilon = f(x,y) + \varepsilon\|y\|^2,$$

оюнун карайбыз.

Алынган болжолдоолордо $F_\varepsilon(x,y)$ функционалы y боюнча тапатак томпок. Ошондуктан жогорку далилдөөлөр боюнча $\exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ табылып, $\forall x \in X, \forall y \in Y$ үчүн

$$F(x, y_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x, y_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x_\varepsilon, y) = F(x_\varepsilon, y) + \varepsilon\|y\|^2. \quad (2.3.8)$$

$\{\varepsilon_k\}, \varepsilon_k > 0, \varepsilon \downarrow 0$ сандык удаалаштыктарын карайбыз жана $(x^k, y^k), x^k = x_{\varepsilon_k}, y^k = y_{\varepsilon_k}$ -бул тең салмактуулук абалына тиешелеш келген удаалаштык болсун.

$\{x^k\} \subset X, \{y^k\} \subset Y$ жана X, Y тер компакт болушкандыктан камтылуучу удаалаштык тактыгына чейин $x^k \to x^* \in X, y^k \to y^* \in Y (k \to \infty)$ деп эсептөөгө болот.

Анда (2.3.8)-ден $\forall x \in X, \forall y \in Y$ үчүн

$$F(x, y^k) \leq F(x^k, y^k) + \varepsilon_k\|y\|^2 \leq F(x^k, y) + \varepsilon_k\|y\|^2.$$

Ошентип, $\{x^k\},\{y^k\}$ удаалаштыктарынын каалагандай (x^*, y^*) пределдик түгөйү тең салмактуулук абалы ($F(\cdot,\cdot)$ тин $X \times Y$ теги ээр сымал чекити) болуп эсептелет. #

Бул параграфтын акырында чекиттин тең салмактуулук абалы болушунун жөнөкөй критерийин келтиребиз.

2.3.5-сүйлөм. Эгерде $x^0 \in X, y^0 \in Y$ жана $\alpha \in R$ үчүн

$$\left.\begin{aligned} F(x^0, y) \geq \alpha, \forall y \in Y, \\ F(x, y^0) \leq \alpha, \forall x \in X, \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.9)$$

болсо, анда (x^0, y^0) -бул $\Gamma = \{F, X, Y\}$ оюнунда тең салмактуулук абалы жана

$$\alpha = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x^0, y^0) \qquad (2.3.10)$$

болот.

Далилдөө. $y = y^0$ жана $x = x^0$ болгондо (2.3.9)-дан $F(x^0, y^0) = \alpha$ жана

$$\forall x \in X : F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y), \forall y \in Y$$

келип чыгат. #

§4. Тең салмактуулук абалынын мүнөзү

2.4.1-теорема. Айталы, $\Gamma = \{F, X, Y\}$ антагонистикалык оюнунда $X \subset R^m, Y \subset R^m$ көптүктөрү томпок болушсун. Мындан сырткары, $x \to F(x,y)$ чагылтуусу ар бир өзгөрүлмө боюнча дифференцирленүүчү, б.а. $\dfrac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial x}$ жана $\dfrac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial y}$ жекече градиенттери жашасын.

Анда, эгерде $(x^0, y^0) \in C(\Gamma)$ болсо, анда төмөндөгү шарттар орун алат:

$$\left\langle \frac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial x}, x - x^0 \right\rangle \leq 0, \forall x \in X, \qquad (2.4.1)$$

$$\left\langle \frac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial y}, y - y^0 \right\rangle \leq 0, \forall y \in X \qquad (2.4.2)$$

Эгерде оюн томпок болсо, анда (2.4.1) жана (2.4.2) шарттары $(x^0, y^0) \in C(\Gamma)$ болушу үчүн жетиштүү болот.

Далилдөө. 1) *Зарылдык шарты.* Эгерде $(x^0, y^0) \in C(\Gamma)$ болсо, анда $F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0), \forall x \in X$ болот. Жекече учурда

$\forall x \in X, \forall \lambda \in [0,1]: F(x^0 + \lambda(x - x^0), y^0) = F((1-\lambda)x^0 + \lambda x, y^0) \leq F(x^0, y^0).$

Бул төмөндөгү барабарсыздыкка тең күчтүү:

$$F(x^0 + \lambda(x - x^0), y^0) - F(x^0, y^0) \leq 0, \forall x \in X.$$

$h \overset{\Delta}{=} (x - x^0)$ деп белгилеп жана $\lambda > 0$ га бөлүп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\frac{F(x^0 + \lambda h, y^0) - F(x^0, y^0)}{\lambda} \leq 0.$$

Багыт боюнча туундунун аныктоосун пайдалансак

$$\left\langle \frac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial x}, x - x^0 \right\rangle \overset{\Delta}{=} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(x^0 + \lambda h, y^0) - F(x^0, y^0)}{\lambda} \leq 0$$

болот, мындан (2.4.1)-келип чыгат.

Эгерде тең салмактуулук абалынын аныктоосундагы барабарсыздыктын оң жагын карасак, жогорудагыга аналогиялуу түрдө эле (2.4.2)-далилденет.

2) *Жетиштүүлүк шарты.* Айталы, Γ оюну томпок жана (2.4.1), (2.4.2)-барабарсыздыктары орун алсын. Мындан $y \to F(x^0, y)$ чагылтуусунун томпок экендиги келип чыгат. (2.4.2)-ни эске алсак, томпоктуулуктун касиети боюнча

$$F(x^0, y) - F(x^0, y^0) \geq \left\langle \frac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial y}, y - y^0 \right\rangle \geq 0, \forall y \in Y$$

орун алат, башкача айтканда, тең салмактуулук абалдын аныктоосундагы оң барабарсыздык аткарылат.

Аналогиялуу түрдө эле $y \to F(x, y^0)$ чагылтуусунун ийметигин эске алсак,

$$F(x, y^0) - F(x^0, y^0) \leq \left\langle \frac{\partial F(x^0, y^0)}{\partial x}, x - x^0 \right\rangle \leq 0, \forall x \in X$$

орун алат.

Алынган барабарсыздыктарды бириктирсек,

$$\forall x \in X: F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y), \forall y \in Y$$

орун алат же $(x^0, y^0) \in C(\Gamma)$ болот. #

Үчүнчү бөлүм

МАТРИЦАЛЫК ОЮНДАР

§1. Негизги аныктоолор

Чектүү $\Gamma = \{X, Y, F\}, X = \{1,2,...m\}, Y = \{1,2,...,n\}$ антагонистикалык оюну *матрицалык оюн* деп аталаарын эскертип кетебиз. Ар бир түгөй стратегиялар үчүн эффективдүүлүк критерийинин маанисин эсептөөгө болот:

$$F(i,j) = a_{ij}, i = 1,...,m, j = 1,...,n.$$

Жыйынтыгында $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ матрицасы келип чыгат. A матрицасы менен берилген матрицалык оюнду Γ_A же $\Gamma(A)$ деп белгилейбиз.

Матрицалык оюн $(m \times n)$-ченемдүү оюн деп, б.а. $i = 1,2,...m, j = 1,2,...,n,$ деп эсептелинет.

1-оюнчунун стратегияларын тиешелеш келген $i = 1,2,...m$ номерлери менен, ал эми 2-оюнчунун стратегияларын тиешелеш келген $j = 1,2,...n$ номерлери менен белгилейбиз. A матрицасынын i-жолчосун $(A)_i$ деп, j-мамычасын $[A]_j$ деп, ал эми алардын кесилишинде турган элементти a_{ij} же $a(i,j)$ деп белгилейбиз.

Бул матрицалык оюндагы *абал* деп (i,j) түгөй санын эсептөөгө болот, мында i-бул утуш матрицасынын жолчосунун номери, j-мамычасынын номери.

Матрицалык оюндагы стратегиялардын көптүгүнүн чектүүлүгүн эске алсак, анда анын стратегияларына тиешелеш экстремум жашайт, ошондуктан эң жакшы гарантияга ээ жыйынтыктарды төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$ЭГЖ1 \overset{\Delta}{=} \underline{v}(\Gamma) = \max_i \min_j a_{ij}, \quad ЭГЖ2 \overset{\Delta}{=} \bar{v}(\Gamma) = \min_j \max_i a_{ij} \tag{3.1.1}$$

3.1.1-аныктоо. Эгерде $\forall i : a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}, \forall j$ (3.1.2)-орун алса, анда матрицалык оюндагы (i^*, j^*) абалы *тең салмактуулук абалы (же ээр сымал чекит)* деп аталат.

Антагонистикалык оюндар сыяктуу эле, матрицалык оюндагы ээр сымал чекиттин жашашы үчүн ЭГЖдын дал келиши зарыл жана жетиштүү:

$$\underline{v}(\Gamma) = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \bar{v}(\Gamma) \tag{3.1.3}$$

Мында эң жакшы гарантияланган жыйынтыктар оюндун мааниси жана A матрицасынын айрым элементтери менен дал келишет:

$$\underline{v}(\Gamma)=\bar{v}(\Gamma)=v(\Gamma)=a_{i_\bullet j_\bullet} \qquad (3.1.4)$$

Эгерде бул ЭГЖтар түрдүү жана алардагы сырткы экстремум кандайдыр бир $i_\bullet$ жана $j_\bullet$ да жетишсе, анда

$$\max_i \min_j a_{ij} \le a_{i_\bullet j_\bullet} \le \min_j \max_i a_{ij}.$$

Матрицанын ээр сымал чекиттерин табуу жана жашашын текшерүү төмөндөгү схема боюнча жүргүзүлөт:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \max\limits_i a_{i1}\ \max\limits_i a_{i2} \dots \max\limits_i a_{in} \end{array}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \to \min\limits_j a_{1j} \\ \to \min\limits_j a_{2j} \\ \quad \dots \\ \to \min\limits_j a_{mj} \end{array}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \\ \\ \\ \end{array}$$

3.1.2-мисал. 1-оюнчу монетаны столго коет, ал эми 2-оюнчу карабай туруп монетанын кайсы жагы (б.а. «орел» (о) же «решка» (р)) жогоруда экендигин табат. Эгерде туура тапса, анда ал 1-оюнчудан 1 сом утуп алат, тескери учурда 1 сом төлөйт.

Бардык мүмкүн болгон абалдагы эффективдүүлүк критерийинин маанисин эсептейбиз:

$F(O,O)=F(P,P)=-1, F(O,P)=F(P,O)=1.$

Матрицаны тургузабыз:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=-1, \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=1$ экендигин, б.а. жөнөкөй мисалда да тең салмактуулук абалынын жашабай тургандыгын көрүү жеңил эле. #

§2. Аралаш стратегиялар

Эгерде 1-жана 2-оюнчулардын ЭГЖры, б.а. $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ жана $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ лар бири-биринен айырмалуу болушса, анда антагонистикалык оюндар теориясынын негизинде бул утуш матрицага ээ болгон оюн тең салмактуулук абалына ээ болбойт.

Ошондуктан, жалпы учурда оюнчулар ортосундагы $\min_j \max_i a_{ij} - \max_i \min_j a_{ij} > 0$ айырмасы жөнүндөгү суроо чечилбеген бойдон кала берет. Бул учурда оюнчулар бул айырмадан көбүрөөк пайда алуу үчүн мүмкүн болгон кошумча стратегияларды издешет. Ал үчүн өз стратегияларын кокусунан тандоо максатка ылайыктуу болот. Мында *аралаш стратегиялар* түшүнүгү келип чыгат.

3.2.1-аныктоо. Оюндун жүрүшүндөгү оюнчунун ар бир таза стратегияларынын тандалуу ыктымалдуулуктарынын вектору матрицалык оюндагы оюнчунун *аралаш стратегиясы* деп аталат.

Аралаш стратегиялардын келип чыгуу процессин кеңирирээк талкуулайлы. Айталы, оюн көп жолу кайталансын, ал эми оючуларды ар бир партиядагы утуш эмес, бардык партиялардагы утуш кызыктырсын. Мындай оюнду *көп жолу кайталануучу операция* (ККО) деп айтабыз.

Эгерде кандайдыр бир партияда 1-оюнчу каршылашынын стратегиясын алдын-ала билип калса, анда ал бул стратегияга өзү үчүн эң жакшы жол менен жооп берип жана гарантиялангандан көп утушка ээ болушу мүмкүн.

Мисалга алсак, эгерде кийинки стратегияда 2-оюнчу гарантияланган стратегиясын (минимакстык) же $j_* : \max_i \min_j a_{ij_*} = \min_j \max_i a_{ij}$ ны пайдалана тургандыгын 1-оюнчу билип калса, анда $i_0 : a(i_0, j_*) = \max_i a(i, j_*) \overset{\Delta}{=} v_1$ страетегиясын тандоо менен ал v_1 утушун камсыз кылат, жана бул утуш анын гарантияланган жыйынтыгы $\underline{v}(\Gamma) = \max_i \min_j a_{ij}$ дан жогору болот. Чындыгында, эгерде ээр сымал чекит жашабаса, анда

$$v_1 = a(i_0, j_*) = \max_i a(i, j_*) = \min_j \max_i a_{ij}$$

экендигин эске алып,

$$\underline{v}(\Gamma) = \max_i \min_j a_{ij} < a(i_0, j_*) = \max_i (i, j_*) = \min_j \max_i a_{ij} = v_1 = \bar{v}(\Gamma)$$

га ээ болобуз.

Ошондуктан ар бир партиядагы ар бир оюнчунун стратегиясын каршылашынын билбегендиги оюнчулар үчүн негизги маселе болуп эсептелет.

Эгерде 1-оюнчу бардык партияларда кандайдыр бир таза стратегияны пайдаланса, анда бул фактыны 2-оюнчу тез эле байкап жана өз пайдасына колдоно баштайт.

Ошондуктан, эгерде 1-оюнчу бардык партияларда кандайдыр бир таза стратегияны пайдаланууну чечсе, анда ага оптималдуу гарантияланган стратегияны колдонуу баарынан ыңгайлуу.

Эгерде ККОда бир эмес бир нече мүмкүн болгон стратегияларды тандоого аракет кылсак, анда төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$F(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}a(i_k,j).$$

Бул фактордун ККОды жүргүзүү эффективдүүлүгүнө (1-оюнчу үчүн) тийгизген таасирин көрүү кызык болот.

Жөнөкөйлүк үчүн эки стратегиянын, б.а. $X_0=\{1,2\}$дун эффективдүүлүк баасына токтололу. Айталы, $\forall k=1,...,N: j_k=j$ болсун. Эгерде N жолу кайталанган оюндун M учурунда 1-стратегия, ал эми калган учурларда 2-стратегия колдонулса, анда $p=\frac{M}{N}$ ыктымалдуулук маанисиндеги эффективдүүлүк баасы төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$W_c(p)=\min_{j\in J}[p\cdot a(1,j)+(1-p)\cdot a(2,j)] \qquad (3.2.1)$$

мында $J\overset{\Delta}{=}\{1,...,n\}$.

Бир эле убакта төмөндөгүлөр орун алган j_0 жашабасын:

$$a(1,j_0)=\min_{j\in J}a(1,j)\overset{\Delta}{=}m_1,$$

$$a(2,j_0)=\min_{j\in J}a(2,j)\overset{\Delta}{=}m_2.$$

Башкача айтканда $\forall j\in J$ үчүн төмөндөгү туура болсун:

$$\left.\begin{array}{l} же\ \ a(1,i)>\min\{m_1,m_2\} \\ же\ \ a(2,i)>\min\{m_1,m_2\} \end{array}\right\} \qquad (3.2.2)$$

Анда

$$W_c(p)>\min\{m_1,m_2\},\forall p:0\le p\le 1 \qquad (3.2.3)$$

экендигин көрсөтөбүз.

Чындыгында

$$\left.\begin{array}{l} \forall j\in J: a(1,j)\ge m_1\ge\min\{m_1,m_2\}, \\ \forall j\in J: a(2,j)\ge m_2\ge\min\{m_1,m_2\} \end{array}\right\} \qquad (3.2.4)$$

(3.2.4)-нүн биринчи барабарсыздыгын p га, экинчисин $(1-p)$га көбөйтүп жана аларды суммаласак төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$p\cdot a(1,j)+(1-p)\cdot a(2,j)\ge\min\{m_1,m_2\},\forall j\in J \qquad (3.2.5)$$

Демек,

$$\min_j \{p \cdot a(1,j) + (1-p) \cdot a(2,j)\} \geq \min\{m_1, m_2\} \qquad (3.2.6)$$

Бирок, (3.2.4)-нүн оң жагындагы барабарсыздыктардын бири (3.2.2) шарты боюнча тапатак болгондуктан (3.2.5)-де барабардык белгиси болушу мүмкүн эмес. Анда (3.2.6)-да тапатак барабардык болот:

$$\min_j \{p \cdot a(1,j) + (1-p) \cdot a(2,j)\} > \min\{m_1, m_2\}. \qquad (3.2.6)$$

Демек, стратегиялардын каалагандай «аралашмасын» пайдалануу эки стратегиянын эң жаманына караганда тапатак жакшы болот.

Бирок, $p = \dfrac{M}{N}$ ны тандоодо күчтүүрөөк барабарсыздык орун алат:

$$W_c(p) \geq \max\{m_1, m_2\} \qquad (3.2.7)$$

Чындыгында,

$$\max_{0 \leq p \leq 1} \min_{j \in J} [p \cdot a(1,j) + (1-p) \cdot a(2,j)] \geq$$

$$\geq \max_{p=0; p=1} \min_{j \in J} [p \cdot a(1,j) + (1-p) \cdot a(2,j)] =$$

$$= \max\{\min_{j \in J} a(1,j); \min_{j \in J} a(2,j)\} = \max\{m_1, m_2\}$$

(3.2.7)-барабарсыздыгынын мааниси: стратегиялар көптүгүн кеңейтүү пайдалуу гана болушу мүмкүн (1 чи же 2 чи стратегияларды гана пайдаланууга $p=1$ жана $p=0$ тиешелеш келет).

Ошентип, j өзгөрбөгөн учурда $\forall k$ үчүн жыштыктары тиешелеш түрдө p_0 жана $(1-p_0)$ болгон стратегияларды төмөндөгү барабардык орун ала тургандай кылып колдонуу ыңгайлуу:

$$\min_j [p_0 \cdot a(1,j) + (1-p_0) \cdot a(2,j)] =$$

$$= \max_{0 \leq p \leq 1} \min_j [p \cdot a(1,j) + (1-p) \cdot a(2,j)].$$

Операцияларды кайталоону мындай уюштурууда стратегиялар болуп 1-жана 2-стратегиялар эмес, аларды колдонуу жыштыктары (ыктымалдуулуктары) p жана $(1-p)$ эсептелинет. Мындай стратегия түшүнүгүн каалагандай сандагы $\{1, 2, ..., m\}$ таза стратегияларына которуу кыйын эмес, мында аралаш стратегиялар болуп жыштыктар эсептелинет:

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

§3. Матрицалык оюндун аралаш кеңейиши жана фон Неймандын теоремасы

Жогорудагы параграфта таза стратегияларга караганда стратегиялар аралашмасын пайдалануунун артыкчылыгы көрсөтүлдү. Ошондуктан бардык таза стратегиялардын аралашмасын колдонууга мүмкүн болгон кеңейтилген матрицалык оюнду түзүү максатка ылайыктуу. Стандарттуу түрдө жыштыктардан ыктымалдуулуктарга өтүп, төмөндөгүдөй мүмкүн болгон стратегиялардын жаңы көптүктөрүн кийребиз:

$$\left.\begin{aligned} X&=\{x=(x_1,...,x_m)^T\in R^m \,/\, x_i\geq 0, i=1,...,m, \sum_{i=1}^{m}x_i=1\},\\ Y&=\{y=(y_1,...,y_n)^T\in R^n \,/\, y_j\geq 0, j=1,...,n, \sum_{j=1}^{n}y_j=1\}.\end{aligned}\right\} \quad (3.3.1)$$

Мурдагы $i\in\{1,...,m\}, j\in\{1,...,n\}$ стратегиялары эми жаңы кийрилген аралаш стратегиялардын жеке учуру болушат жана таза стратегия деп эсептелет.

Чындыгында,

$$x=e^i=(0,...,0,\overset{i}{1},0,...,0)^T\in R^m, y=e^j=(0,...,0,\overset{j}{1},0,...,0)^T\in R^n$$

десек, стратегиялар аралашмасынын жеке учуру болгон таза стратегияларга ээ болобуз. Башкача айтканда i_0 таза стратегиясын колдонуу ыктымалдуулугу 1 ге барабар болсо, бул аралаш стратегиялар тилинде e^{i_0} көрүнүшүнө ээ болгон i_0-таза стратегиясы жөнүндө сөз болгондугун билдирет.

Экинчи жактан мүмкүн болгон стратегиялардын X жана Y көптүктөрү төмөндөгү өз чокулары - таза стратегиялардын томпок оболочкалары болушат:

$$\left.\begin{aligned} X&=con\vartheta\{e^1,...,e^m\}, e^i\in R^m, i=1,...,m,\\ Y&=con\vartheta\{e^1,...,e^n\}, e^j\in R^n, j=1,...,n.\end{aligned}\right\} \quad (3.3.2)$$

Ошондуктан мүмкүн болгон стратегиялардын көптүктөрүн мындай кеңейтүү бир кыйла утуктуу жана табигый болот.

Эми жаңы мүмкүн болгон стратегиялар көптүгүндө биринчи оюнчунун утуш функциясын тургузуу маанисин карайбыз. Мында эски эффективдүүлүк критерийинин мааниси $A=\{a_{ij}\}$ матрицасы аркылуу берилгендигин (мында $F(i,j)=a_{ij}$) экендигин эске салабыз. Биз оюндун табигый кеңейтилишин тургузууга аракет кылып жаткандыктан, бул касиетти сактоо керек. Ошондуктан

$$F(e^i, e^j) = a_{ij} (e^i \in R^m, e^j \in R^n) \qquad (3.3.3)$$

(3.3.3)-касиетин төмөндөгү эффективдүүлүк критерийи канаатандырат:

$$F(x, y) = \langle x, Ay \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (3.3.4)$$

Ошентип жаңы матрицалык оюн тургуздук: мүмкүн болгон стратегиялардын көптүгү (3.3.1)-(3.3.2) катыштары менен, ал эми утуш функциясы -(3.3.4) формулалардын жардамында берилет.

Эми $\Gamma(A) = \{X, Y, F\}$-матрицалык оюнундагы тең салмактуулук абалынын жашашы жөнүндөгү суроого өтөбүз.

3.3.1-теорема (фон Нейман, [1952], теоремасы)

Каалагандай матрицалык оюндун аралаш кеңейишинде тең салмактуулук абалы жашайт (же каалагандай матрицалык оюн аралаш стратегияларда чечилүүчү болот).

Далилдөө. Далилдөө үчүн томпок компактуу оюндагы тең салмактуулук абалынын жашашы жөнүндөгү теореманы пайдаланабыз.

1) Алгач мүмкүн болгон стратегиялардын X жана Y көптүктөрүнүн томпок жана компакттуу экендигин көрсөтөбүз. Томпоктуулугу (3.3.2)-ден келип чыгат.

а) X жана Y көптүктөрүнүн чектелгендигин көрсөтөбүз. X көптүгүнүн (3.3.1) аныктоосун эске алсак, $0 \le x_i \le 1, i = 1, ..., m$. Ошондуктан

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le m, \forall x \in X .$$

Мындан X тин R^m де чектелгендиги келип чыгат. Ал эми $Y \subset R^n$ тин аныктоосунун толук симметриялуулугунан Y көптүктөрүнүн R^n де чектелгендиги келип чыгат.

б) Айталы $\{x^k\} \subset X, x^k \to x^0$ болсун. $x^0 \in X$ экендигин көрсөтүү үчүн

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \langle e_m, x^0 \rangle = 1 \qquad (3.3.5)$$

орун алаарын текшерүү жетиштүү, мында $e_m = (1,1,...,1)^T \in R^m$. Бирок $\langle e_m, x \rangle = 1$ жана $x \to \langle e_m, x \rangle$-сызыктуу формасы үзгүлтүксүз болгондуктан, $x^k \to x^0$ да (3.3.5)-орун алат.

Демек, X жана Y көптүктөрү томпок компакттар болуп эсептелишет.

2) $F(x,y)=\langle x, Ay\rangle$ эффективдүүлүк критерийи томпок–компакттуу оюндун бардык талаптарын канааттандырат.

Чындыгында,

$$x \to \langle x, Ay\rangle : R^m \to R(\forall y \in R^n),$$

$$y \to \langle xA, y\rangle : R^n \to R(\forall x \in R^m)$$

функциялары сызыктуу жана x боюнча иймек, y боюнча томпок болушат.

3) Ошондуктан $\Gamma(A)=\{X,Y,F\}$ матрицалык оюну томпок–компакттуу оюндун жекече учуру болуп эсептелет жана анда тең салмактуулук абалы жашайт. #

§4. Матрицалык оюндардагы оптималдуу стратегиялардын негизги касиеттери

Жогорудагы параграфта (3.3.1), (3.3.4)-көрүнүшүндө берилген каалагандай матрицалык оюндун тең салмактуулук абалына ээ экендиги көрсөтүлгөн. Эми тең салмактуулук абалын түзүп турган оптималдуу стратегиялардын касиеттерин изилдейбиз. $x^* \in X_*, y^* \in Y_*$ оптималдуу стратегияларын жана оюндун $v_* = v(\Gamma) = v(A)$ маанилерин карайбыз.

3.4.1-теорема (оптималдуулук шарты)

$\Gamma(A)$ оюнунда (x^*, y^*) нын тең салмактуулук абалы болушу үчүн $\forall i=1,...,m, \forall j=1,...,n$ үчүн төмөндөгү барабарсыздык орун алышы зарыл жана жетиштүү:

$$(Ay^*)_i \overset{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v_* \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \overset{\Delta}{=} (x^*, A)_j \qquad (3.4.1)$$

Далилдөө. 1) *зарыльдык шарт*ы. Эгерде (x^*, y^*, v_*) - бул $\Gamma(A)$ оюнунун чечими болсо анда тең салмактуулук абалынын аныктоосу боюнча $\forall x \in X, \forall y \in Y$:

$$\langle x, Ay\rangle \le v(A) \overset{\Delta}{=} \langle x^*, Ay^*\rangle \le \langle x^*, Ay\rangle \qquad (3.4.2)$$

Аралаш стратегиялардын жекече учуру таза стратегиялар болушкандыктан жекече учурда

$$x = (0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0)^T,\ y = (0,...,0,\underset{j}{1},0,...,0)^T :$$

$$(Ay^*)_i \le v(A) \le (x^*A)_j = (A^T x^*)_j, \forall i, \forall j.$$

2)*Жетиштүүлүк шарты.* Айталы (3.4.1) орун алсын, мында (x^*, y^*) стратегиялардын кандайыр бир түгөйү. (3.4.1)-нин сол жагын x_i^* га көбөйтүп жана i боюнча суммалайбыз. Аналогиялуу түрдө эле (3.4.1)-нин оң жагын y_j^* га көбөйтүп жана j боюнча суммалайбыз. Жыйынтыгында төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$F(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \le v_* \sum_{i=1}^{m} x_i^* = v_* =$$

$$= v_* \sum_{j=1}^{n} y_j^* \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* = F(x^*, y^*).$$

Анда $v_* = F(x^*, y^*)$. Эми сол жагын x_i ге $(x = (x_1, ..., x_m))$, оң жагын y_j га $(y = (y_1, ..., y_m))$ көбөйтүп, суммаласак төмөндөгү келип чыгат:

$$F(x, y^*) \le v_* = F(x^*, y^*) \le F(x^*, y), \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Анда $(x^*, y^*) \in C(\Gamma)$. #

3.4.2-натыйжа (оптималдуулук шартынын башка баяндалышы) Айталы $\Gamma(A)$ оюнунун мааниси v_* болсун.

а) $x^* \in X$ стратегиясынын оптималдуу болушу үчүн

$$v_* \le (x^*A)_j, \forall j = 1, ..., n \qquad (3.4.3)$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

б) $y^* \in Y$ стратегиясынын оптималдуу болушу үчүн

$$(Ay^*)_i \le v_*, \forall i = 1, ..., m \qquad (3.4.4)$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү. #

3.4.3-мисал. Айталы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ болсун. $v_* = \frac{8}{3}$ болгондо $x^* = y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ стратегияларынын оптималдуулугун текшерүү талап кылынат. Берилген маанилерди (3.4.1)-ге коюп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$(Ay^*)_1 = \frac{8}{3} = (x^*A)_1,$$

$$(Ay^*)_2 = \frac{8}{3} = (x^*A)_2.$$

Демек, (3.4.1)-шарты орун алат, ошондуктан (x^*, y^*)-тең салмактуулук абалы болот. #

3.4.4-теорема. (Катаалсыздыкты толуктоочу шарт.)

а) 1-оюнчунун $x^*=(x_1^*,...,x_m^*)$ оптималдуу аралаш стратегиясында

$$v_* = (Ay^*)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^*, i \in \{1,...,m\} \qquad (3.4.5)$$

шарты аткарылган x_i^* лер гана нөлдөн айырмалуу болот (башкача айтканда $x_i^* > 0$болот).

б) 2-оюнчунун $y^*=(y_1^*,...,y_n^*)$ оптималдуу аралаш стратегиясында

$$v_* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = (x^* A)_j, j \in \{1,...,n\} \qquad (3.4.6)$$

шарты аткарылган $y_j^* > 0$лар нөлдөн айырмалуу болушат.

Далилдөө. а) Каршысынан далилдейбиз. Айталы ушундай бир i_1номери жашап $x_{i_1}^* > 0,$ бирок $(Ay^*)_{i_1} < v_*$ (3.4.7) – орун алсын. Оптималдуулук шарттары боюнча (3.4.4) гө ээ болобуз. (3.4.4) оптималдуулук шартын $i \neq i_1$ болгондо x_i^*га көбөйтүп жана суммалайбыз:

$$\sum_{i \neq i_1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq v_* \sum_{i \neq i_1} x_i^* .$$

Эми (3.4.7)–нин экинчи барабарсыздыгын $x_{i_1}^*$ га көбөйтөбүз:

$$x_{i_1}^* \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} y_j^* < v_* x_{i_1}^*$$

жана жыйынтыгын жогорудагы суммага кошобуз:

$$v_* = F(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* < v_* \sum_{i=1}^{m} x_i^* = v_*.$$

Акыркы барабарсыздыктын мүмкүн эместиги алгачкы болжолдоонун туура эместигин далилдейт.

б)жогорудагыга аналогиялуу эле далилденет. #

3.4.5-эскертүү. 3.4.4- теорема боюнча төмөндөгү импликациялар далилденди:

$$\{\exists x^* \in X^* : x_{i_0}^* > 0\} \Rightarrow \{(Ay^*)_{i_0} = v_*, \forall y^* \in Y_*\},$$

$$\{\exists y^* \in Y^* : y_{j_0}^* > 0\} \Rightarrow \{v_* = \left(x^* A\right)_{j_0}, \forall x^* \in X_*\}.$$

3.4.6-натыйжа. а) $y^* \in Y_*$ жана кандайдыр бир $i_0 \in \{1,...,m\}$ үчүн $(Ay^*)_{i_0} < v_*$ орун алсын. Анда $\forall x^* \in X_*; x_{i_0}^* = 0$ болот.

б) $x^* \in X_*$ жана кандайдыр бир $j_0 \in \{1,...,n\}$ үчүн $v_* < \left(x^* A\right)_{j_0}$ орун алсын. Анда $\forall y^* \in Y_* : y^*_{j_0} = 0$ болот.

Башкача айтканда төмөндөгү айтуулар орун алат:

$$\{\exists y^* \in Y^* : (Ay^*)_{j_0} < v_* \} \Rightarrow \{ x^*_{i_0} = 0, \forall x^* \in X_* \}$$

$$\{\exists x^* \in X^* : v_* < (x^* A)_{i_0} \} \Rightarrow \{ y^*_{j_0} = 0, \forall y^* \in Y_* \}. \ \#$$

3.4.7-теорема. Төмөндөгү барабарсыздыктар орун алат:

$$\max_{1 \le i \le m} \left(Ay^*\right)_i \stackrel{\Delta}{=} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^*_j = \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le m} (Ay)_i = v_* =$$
$$= \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} (xA)_j = \min_{1 \le j \le n} \left(x^* A\right)_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x^*_i \qquad (3.4.8)$$

Далилдөө. $\sum_{i=1}^{m} x^*_i = 1$ болгондуктан жок дегенде бир i үчүн $x^*_i > 0$ го ээ болобуз. Анда (3.4.5)-боюнча $(Ay^*)_i = v_*$. Мында (3.4.1)-ни эске алсак төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\max_{1 \le i \le m} (Ay^*)_i \stackrel{\Delta}{=} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^*_j = v_* \qquad (3.4.9)$$

Аналогиялуу түрдө эле (3.4.6) жана (3.4.1)-ден төмөндөгү келип чыгат:

$$\min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x^*_i \stackrel{\Delta}{=} \min_{1 \le j \le n} \left(x^* A\right)_j = v_* \qquad (3.4.10)$$

Мындан дагы $\forall x \in X, \forall y \in Y$ үчүн

$$\langle x, Ay \rangle \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) \ge$$

$$\ge \left[\min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right] \sum_{j=1}^{n} y_j = \min_{1 \le j \le n} (xA)_j .$$

Башкача айтканда

$$\min_{1 \le j \le n} (xA)_j \le \min_{y \in Y} F(x, y) \stackrel{\Delta}{=} \min_{y \in Y} (x, Ay),$$

ошондуктан

$$\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} (xA)_j \le \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = v_* .$$

Бирок, (3.4.3)- оптималдуулук шартынын негизинде

$$v_* \le \min_{1 \le j \le n} \left(x^* A\right)_j \le \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} (xA)_j \qquad (3.4.3')$$

орун алат.

Ошондуктан

$$\max_{x\in X}\min_{1\le j\le n}(xA)_j=\min_{1\le j\le n}\left(x^*A\right)_j=v_*.$$

(3.4.8)- деги калган барабарсыздыктар аналогиялуу түрдө эле далилденет. #

3.4.8-натыйжа. Каалагандай A матрицасы үчүн төмөндөгү барабарсыздыктар орун алат:

$$\max_{1\le i\le m}\min_j a_{ij}\le v_*=v(A)\le\min_{1\le j\le n}\max_i a_{ij}.$$

Далилдөө. $e^1,...,e^m\in X$ болгондуктан

$$v_*=v(A)=\max_{x\in X}\min_i\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i\ge\max_i\min_j a_{ij}.$$

Экинчи барбарсыздык аналогиялуу эле далилденет. #

3.4.9-натыйжа. i) Эгерде 1-оюнчу i_0-таза оптималдуу стратегиясына ээ болсо, анда

$$v_*\overset{\Delta}{=}v(A)=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j a_{i_0j}.$$

ii) Эгерде 2-оюнчу j_0-таза оптималдуу стратегиясына ээ болсо, анда

$$v_*\overset{\Delta}{=}v(A)=\min_j\max_i a_{ij}=\max_i a_{ij_0}.\ \#$$

3.4.10-эскертүү. 3.4.9-натыйжанын теоритикалык-оюндук мааниси айкын. 1-оюнчу ЭГЖ ка ээ болот, эгерде каршылашы ал колдонгон таза стратегияны билсе. Бирок, эгерде анын кандайдыр бир таза стратегиясы оптималдуу болсо, анда ал колдонуу менен гана чектелет, ал эми каршылашы болсо бул абалды пайдаланып аракет жүргүзө алат.

3.4.11-эскертүү. (3.4.7)-ден төмөндөгү келип чыгат:

$$\min_j(xA)_j\le v_*\overset{\Delta}{=}v(A)\le\max_i(Ay)_i,\forall x\in X,\forall y\in Y.$$

Мындан сырткары x^*-оптималдуу болот, качан жана качан гана $\min_j\left(x^*A\right)_j=v_*=v(A)$ болгондо, ал эми y^*-оптималдуу болот, качан жана качан гана $\max_i\left(Ay^*\right)_i=v_*=v(A)$ болгондо.

Ошентип, $\min_{1\le j\le n}(xA)_j$ санын $x\in X$ стратегияларынын эффективдүүлүк баасы катары кароого болот. Ал эми 2-оюнчу үчүн $y\in Y$ стратегияларынын эффективдүүлүк баасы болуп $\max_{1\le i\le m}(Ay)_i$ саны эсептелинет.

§ 5. Матрицалык оюндарды жөнөкөй өзгөртүп түзүүлөр

3.5.1-теорема. Айталы $A=\{a_{ij}\}, B=\{b_{ij}+c\}$ -элементтери c-турактуусуна айырмалуу болушкан матрицалар болушсун. Анда $\Gamma(A)$ жана $\Gamma(B)$ оюндарынын оптималдуу стратегиялар көптүктөрү дал келишет, ал эми оюндардын маанилери ошол эле турактууга айырмаланышат: $v(B)=v(A)+c$

Далилдөө. Айталы, $\{x^*, y^*, v_*\}$ -бул $\Gamma(A)$ оюнунун чечими болсун. Анда (3.4.1)- оптималдуулук шартынын негизинде $\forall i=1,...,m, \forall j=1,...,n:$

$$(Ay^*)_i+c \le v_*+c \le (x^*A)_j+c \qquad (3.5.1)$$

Экинчи жактан

$$(By^*)_i=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+c)y_j^*=c+(Ay^*)_i, \forall i=1,...,m.$$

Аналогиялуу түрдө эле

$$(x^*B)_j=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+c)x_i^*=c+(A^T\chi^*)_j, \forall j=1,...,n.$$

Анда (3.5.1)-ден

$$\forall i=1,...,m, \forall j=1,...,n: (By^*)_i \le v_*+c \le (x^*B)_j.$$

Мындан $v(B)=v_*+c$ жана $(x^*, y^*, v(B))$-бул $\Gamma(B)$ оюнунун чечими болот. #

3.5.2-эскертүү. Аналогиялуу жыйынтыкка A жана B матрицаларынын элементтери пропорционалдуу болгон шартта, башкача айтканда $b_{ij}=ka_{ij}, k>0$ болгондо, ээ болобуз. Бул учурда $v(B)=kv(A)$ болот.

§ 6. Оптималдуулук шартынын башка баяндалышы

Оюнчулардын стратегияларын оптималдуулукка текшерүүдө 4-параграфтагы шарттарды колдонуу үчүн оюн маанисин билүү керек.

3.6.1-теорема. Эгерде $x^0 \in X, y^0 \in Y$ -оюнчулардын кандайдыр бир стратегиялары, ал эми v болсо

$$\max_i(Ay^0)_i \le v \le \min_j(x^0A)_j \qquad (3.6.1)$$

барбарсыздыгын канааттандырган кандайдыр бир сан болсо, анда x^0 жана y^0 дор оюнчулардын оптималдуу стратегиялары,

$v = v(A)$ – оюндун мааниси болот, ал эми (3.6.1)- де барабардык орун алат.

Далилдөө. 3.4.7- теорема боюнча

$$v_* = \max_{x \in X} \min_j (xA)_j = \min_{y \in Y} \max_i (Ay)_i.$$

Ошондуктан

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : \min_j (xA)_j \le v_* \le \max_i (Ay)_i.$$

Экинчи жактан (3.6.1)-нин негизинде $\max_i (Ay)^0 \le v, y^0 \in Y$ тен

$$v_* = \min_{y \in Y} \max_i (Ay) \le \max_i (Ay^0) \le v.$$

Аналогиялуу түрдө эле барабарсыздыктын экинчи бөлүгү үчүн:

$$v \le \min_j (x^0 A)_j \le \max_{x \in X} \min_j (Ay)_j = v_*.$$

Анда

$$v = v_* = v(A), x^0 \in X_*, y^0 \in Y_*. \ \#$$

3.6.2-теорема. Эгерде x^0 жана y^0 - биринчи жана экинчи оюнчулардын стратегиялары болсо, анда бул стратегиялардын оптималдуу болушу үчүн

$$\max_i (Ay^0)_i \le \min_j (x^0 A)_j \qquad (3.6.2)$$

шарты орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө үчүн «v саны» катары (3.6.2)- деги экстремумдардын каалаган бирин алсак болот. #

3.6.3-натыйжа. Эгерде $x^0 \in X$ жана $y^0 \in Y$ стратегиялары үчүн

$$(Ay^0)_j \le (x^0 A)_j, \forall i \in \{1,...,m\}, \forall j \in \{1,...,n\} \qquad (3.6.3)$$

орун алат, анда бул стратегиялар оптималдуу болушат. #

Матрицалык оюндардагы оюнчулардын оптималдуу стратегияларынын көптүктөрүн тиешелеш түрдө $X_* = X_c(A)$ жана $Y_* = Y_c(A)$ деп белгилейбиз.

3.6.4-теорема. $\Gamma(A)$ матрицалык оюнундагы оюнчулардын оптималдуу стратегияларынын X_* жана Y_* көптүктөрү томпок бош эмес компактуу көп грандыктар болушат.

Далилдөө. (3.4.1)-теореманын негизинде төмөндөгү көптүктөр чектүү сандагы туюк жарым тегиздиктеринин кесилиши болушат:

$$X_* = X_c(A) = \{ x^* \in X \mid \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge v_*, \forall j = 1,...,n \}$$

$$Y_* = Y_c(A) = \{ y^* \in Y \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v_*, \forall i = 1,...,n \}$$

Мындан сырткары 3.3.1-теореманын негизинде төмөндөгү көптүктөр томпок компакттар болушат:

$$X = \{ x = (x_1, ..., x_m) / x_i \leq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \},$$

$$Y = \{ y = (y_1, ..., y_n) / y_i \leq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \}$$

Анда $X_* \subset X, Y_* \subset Y$ болгондуктан X_* жана Y_* -томпок компакттуу көп грандык болушат. Ал эми Фон Нейман теоремасынын негизинде алар бош эмес болушат. #

Демек, эгерде оюндун $v_* = v(A)$ мааниси белгилүү (же A матрицасынын жалпы касиеттеринин негизинде табылган) болсо, анда бул оюн үчүн $X_* = X_c(A), Y_* = Y_c(A)$ көп грандыктары берилди деп эсептөөгө болот.

§7. Катаалсыздыкты толуктоочу шарттардын башка формалары

Матрицалык оюндардагы оптималдуу стратегияларды табуу (б.а. A матрицалар классы үчүн $X_* = X_c(A), Y_* = Y_c(A)$ көптүктөрүн көрсөтүү) жетишээрлик татаал маселе.

Оюнчулардын оптималдуу стратегиялар көптүктөрүн систематикалык түрдө жазуу аракеттери аларды универсалдуу эмес альтернативдүү формулалардын жардамында аныктоого алып келет: мында, формулалардын жетишээрлик чоң тизмеси келип чыгып, андан «оптималдуулукка кандидат» болгон формуланы тандоо жана оптималдуулукка текшерүү керек болот.

Ал эми матрицалык оюндардагы оптималдуу стратегияларды сандык жактан табууда эсептөөлөр көлөмү жетишээрлик татаалданат: мында оюндун утуш матрицасынын ченеми жогорулаган сайын эсептөөлөр көлөмү кыйындайт.

Жогоруда айтылгандардын негизинде эки маселе келип чыгат:

а) оюнчулардын оптималдуу стратегиялары үчүн аналитикалык туюнтмаларды издөөнү кыскартуу жана системалаштыруу;

б) оюнчулардын таза стратегияларынын санын азайтуу.

Мына ушул максатта катаалсыздыкты толуктоочу катышты кайрадан төмөндөгүчө баяндоого болот.

3.7.1-теорема. і) (x^*, y^*) -бул $\Gamma(A)$ оюнундагы 1-оюнчу үчүн ыңгайлуу абал болсун. Анда

$$(Ay^*)_i < \langle x^*, Ay^* \rangle = F(x^*, y^*)$$

барабарсыздыгынан $x_i^* = 0$ келип чыгат.

ii) 2-оюнчу үчүн ыңгайлуу болгон абалдар үчүн төмөндөгү орун алат:

$$\{F(x^*, y^*) < (x^* A)_j\} \Rightarrow \{y_j^* = 0\}.$$

Далилдөө. 3.4.4-теоремага аналогиялуу түрдө эле далилденет.#

3.7.2-аныктоо. $sup\, p(x) \overset{\Delta}{=} \{i \in \{1,...,m\} \mid x_i > 0\}$ -индекстер көптүгү $x \in X$ стратегиясынын *алып жүрүүчүсү (спектри)* деп аталат.

3.7.3-теорема. i) Эгерде 1-оюнчунун i_0-таза стратегиясы анын кандайдыр бир $x^* \in X_*$ оптималдуу стратегиясынын алып жүрүүчүсүнө (спектрине) кирсе, анда 2-оюнчунун каалагандай $y^* \in Y_*$ оптималдуу стратегиясы үчүн төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$(Ay^*)_{i_0} = v(A) = v_*, \forall y^* \in Y_*.$$

ii) Аналогиялуу түрдө эле, эгерде $\exists y^* \in Y_* : j_0 \in sup\, p(y^*)$ болсо, анда

$$(x^* A)_{j_0} = v(A) = v_*, \forall x^* \in X_*. \#$$

3.7.4-теорема. i) (x^*, y^*) -бул $\Gamma(A)$ оюнундагы 1-оюнчу үчүн ыңгайлуу абал болсун. Эгерде

$$(Ay^*)_i < \langle x^*, Ay^* \rangle, \forall i = i_1,...,i_k, \qquad (3.7.1)$$

болсо, анда

$$\langle x^0, Ay^* \rangle = \langle x^*, Ay^* \rangle = F(x^*, y^*)$$

барабардыгы орун алат. Мында, $x^0 \in X$ - бул $sup\, p(x^0) = sup\, p(x^*) \overset{\Delta}{=} \{i_1,...,i_k\}$ - алып жүрүүчүсү менен берилген 1-оюнчунун каалагандай аралаш стратегиясы.

Башкача айтканда, (x^0, y^*) абалы да 1-оюнчу үчүн ыңгайлуу болот.

ii) 2-оюнчу үчүн ыңгайлуу болгон абал үчүн тутумдаш тактоо орун алат.

Далилдөө. i) $x^0 = (x_1^0,...,x_m^0)$ үчүн

$$x_{i_p}^0 > 0, \forall p = 1,...,k, x_i^0 = 0, \forall i \neq i_1,...,i_k$$

болсун. (3.7.1)-ни $x_{i_p}^0$ го көбөйтүп жана нөлдөрдү кошкондон кийин төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\langle x^0, Ay^* \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 F(x^*, y^*) = F(x^*, y^*). \#$$

Бул теорема боюнча 2-оюнчунун жок дегенде бир ыңгайлуу абалы үчүн (жеке учурда (x^*, y^*) тең салмактуулук абалы үчүн) $(Ay^*)_i = \langle x^*, Ay^* \rangle, i \in I$ шарты орун алган I-индекстер көптүгүн билүү мааниге ээ. Бул I-индекстер көптүгүн билүү менен биз 1-оюнчу үчүн ыңгайлуу болгон стратегияны тургуза алабыз:

$$x^0 = (x_i^0), \ \ x_i^0 > 0, i \in I, \ \ \sum_{i \in I} x_i^0 = 1, \ \ x_i^0 = 0, \ \ i \notin I.$$

Мисал үчүн, эгерде $|I| = p$ болсо, анда $x_i^0 = \dfrac{1}{p}, i \in I.$

Эми 3.7.1 жана 3.7.3-теоремалардын тескерисин алууга аракет жасайбыз.

3.7.5-теорема. $v_* = v(A)$ -бул $\Gamma(A)$ матрицалык оюнунун мааниси болсун.

i) Эгерде 2-оюнчунун каалагандай $y^* \in Y_*$-оптималдуу стратегиясы үчүн $y_{j_0}^* = 0$ болсо, анда 1-оюнчунун ушундай бир $x^* = (x_1^*, ..., x_m^*) \in X_*$ оптималдуу стратегиясы табылып,

$$(x^* A)_{j_0} > v(A) \qquad (3.7.2)$$

орун алат.

ii) Эгерде $\forall x^* \in X_*$ үчүн $x_{i_0}^* = 0$ болсо, анда $\exists y^* \in Y_*$ табылып,

$$(Ay^*)_{i_0} < v(A) \qquad (3.7.3)$$

орун алат.

Далилдөө. Жалпылыкты бузбастан $v(A) = 0$ деп эсептейбиз. Алгач $K \subset R^m$ томпок конусун карайбыз:

$$K = cone\{(e^i), i = 1, ..., m, [A]_j, j \neq j_0\}.$$

$-[A]_{j_0} \notin K$ экендигин көрсөтөбүз. Каршысынан далилдейли, б.а. $-[A]_{j_0} \in K$ болсун. Анда төмөндөгү орун алат:

$$-[A]_{j_0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{j \neq j_0} \alpha_j [A]_j. \qquad (3.7.4)$$

Мында

$$\lambda_i \geq 0, \alpha_j \geq 0, i = 1, ..., m, j \neq j_0.$$

(3.7.4)-нү координаталык формада жазабыз:

$$-a_{ij_0} = \lambda_i + \sum_{j \neq j_0} \alpha_j a_{ij}, \forall i = 1, ..., m. \qquad (3.7.4')$$

Мындан төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\sum_{j \neq j_0} \alpha_j a_{ij} + a_{ij_0} = -\lambda_i \leq 0, \forall i = 1, ..., m. \qquad (3.7.5)$$

(3.7.5)-ни $\alpha \overset{\Delta}{=} 1 + \sum_{j \neq j_0} \alpha_j > 0$ га мүчөлөп бөлүп жана

$$\left.\begin{array}{l} \hat{y}_j = \dfrac{\alpha_j}{\alpha}, \forall j \neq j_0, \hat{y}_{j_0} = \dfrac{1}{\alpha}, \\ \hat{y} = (\hat{y}_1, ..., \hat{y}_n), \end{array}\right\}$$

деп эсептесек, биз $\hat{y} \in Y$ тин 2-оюнчу үчүн аралаш стратегия болушу мүмкүн экендигине ээ болобуз. Мындан сырткары, (3.7.5)-ден төмөндөгү келип чыгат:

$$(A\hat{y})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{y}_i \leq 0 = v(A), \forall i = 1, ..., m.$$

Ошентип, 2-оюнчунун $\hat{y}$ стратегиясы оптималдуу жана $\hat{y}_{j_0} = \dfrac{1}{\alpha} > 0$, бул болсо теоремадагы $\forall y^* \in Y_* : y^*_{j_0} = 0$ деген болжолдоого каршы келет.

Демек, $-[A]_{j_0} \notin K$ болот.

Анда бөлүнүүчүлүк теоремасы боюнча

$$\exists z \in R^m : \ \left\langle z, -[A]_{j_0} \right\rangle < 0 \leq \langle z, h \rangle, \forall h \in K, \qquad (3.7.6)$$

мындан төмөндөгү келип чыгат:

$$\left\langle z, e^i \right\rangle \geq 0, \forall i = 1, ... m, \qquad (3.7.7)$$

$$\left\langle z, -[A]_j \right\rangle \geq 0, \forall j = 1, ..., n, j \neq j_0. \qquad (3.7.8)$$

(3.7.7)-ден $z_i \geq 0$ го, ал эми (3.7.6)-нын биринчи барабарсыздыгынан $z \neq 0$ го ээ болобуз.

Демек, $\sum_{i=1}^{m} z_i = \beta > 0$. (3.7.6) жана (3.7.8)-барабарсыздыктарын β га бөлүп жана $\hat{x}_i = z_i(\beta)^{-1}$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, ..., \hat{x}_m) \in X$, деп эсептесек, анда $\hat{x} \in X$ ка жана төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\left\langle \hat{x}, [A]_j \right\rangle = (\hat{x}A)_j \geq 0 = v(A), j \neq j_0,$$

$$\left\langle \hat{x}, [A]_{j_0} \right\rangle = (\hat{x}A)_{j_0} > 0 = v(A).$$

Демек, $\hat{x} \in X_*$ стратегиясы 1-оюнчу үчүн оптималдуу стратегия болот жана талап кылынган (3.7.2)-шартын канааттандырат.

ii) Аналогиялуу түрдө далилденет. #

§8. Матрицалык оюндарды чыгаруунун графоаналитикалык ыкмасы

Оюндун бардык тең салмактуулук абалдарын эсептөөдө негизги кыйынчылык оюнчулардын оптималдуу стратегияларынын спектрлерин табууда келип чыга тургандыгын белгилеп кетебиз.

Айрым матрицалык оюндар классы үчүн чыгаруунун графоаналитикалык ыкмасы ыңгайлуу. Мында чечимдердин сапаттык өзгөчөлүктөрү графикалык түрдө аныкталат жана аны пайдаланып чечимдин толук мүнөздөмөсүн аналитикалык түрдө табууга болот. Бул ыкманы $(2\times n)$ жана $(m\times 2)$ ченемдүү оюндарды чечүүдө колдонуу практикалык мүнөзгө ээ.

Графоаналитикалык ыкманын негизинде төмөндөгү турат: 3.4.7-теорема боюнча

$$v(A)=\max_{x\in X}\min_{j}(xA)_j=\min_{y\in Y}\max_{i}(Ay)_i, \qquad (3.8.1)$$

шарты орун алышы керек жана сырткы экстремумдарга оюнчулардын оптималдуу стратегияларында жетишебиз.

$(2\times n)$-ченемдүү оюнду карайбыз:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \qquad (3.8.2)$$

Биринчи оюнчунун стратегиясы $x=(\xi,(1-\xi))$ көрүнүшүндө экендигин көрүү кыйын эмес, мында $\xi\in[0,1]$ -бул 1-таза стратегияны колдонуу ыктымалдуулугу.

2-оюнчу өзүнүн j таза стратегиясын тандасын. Анда 1-оюнчунун утушу тандалган x стратегиясынан көз каранды болот, б.а. ξ ден көз каранды болот:

$$(xA)_j=\xi a_{1j}+(1-\xi)a_{2j}=(a_{1j}-a_{2j})\xi+a_{2j}\overset{\Delta}{=}f_j(\xi).$$

Бул утуштун ξ ден графикалык көз карандылыгы түз сызык менен сүрөттөлөт. 2-оюнчунун ар бир j-таза стратегиясына өзүнчө түз сызык тиешелеш келет (3.8.1-чийме).

Эгерде (3.8.2)-матрица бирдей мамычаларга ээ болсо, анда 2-оюнчунун стратегияларына тиешелеш келген түз сызыктар дал келишет. Жөнөкөйлүк үчүн дал келген мамычаларды бирдей стратегия деп эсептейбиз.

$$\min_j(xA)_j=\min_j(\xi a_{1j}+(1-\xi)a_{2j})=f(\xi)$$

функциясынын графиги болуп 2-оюнчунун стратегияларына тиешелеш келүүчү бардык түз сызыктардын төмөнкү ийилиши (3.8.1-чиймеде жоон сызык менен көрсөтүлгөн бөлүгү) эсептелет.

Бул график

$$f(\xi) = \min_j \{ \xi(a_{1j} - a_{2j}) + a_{2j} \} = \min_j f_j(\xi)$$

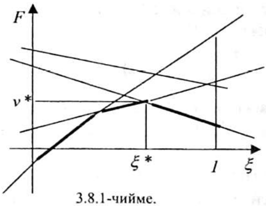
аффиндик функцияларынын минимуму катары жогору карай томпок (же иймек функция) болгон сынык сызыкты көрсөтүп турат.

Бул сынык сызыктын эң жогорку чекити төмөндөгү функция ички экстремумга ээ болгон мааниге тиешелеш келет:

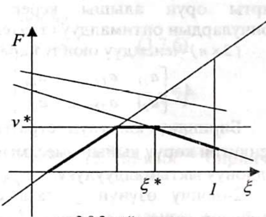
$$\max_{x \in X} \min_j (xA)_j = \max_{\xi \in [1,0]} f(\xi) = \max_{\xi \in [1,0]} \min_j \{ \xi a_{1j} + (1-\xi) a_{2j} \}.$$

Бул чекиттин абциссасы 1-оюнчунун аралаш оптималдуу стратегиясынын биринчи компонентасы, ал эми ординатасы – оюндун мааниси болот.

Эгерде мындай жогорку чекиттер бирден көп болсо, анда ийилген сынык сызык горизонталдуу участкага ээ болот (3.8.2-чийме). Бул учурда 1-оюнчунун оптималдуу стратегияларынын көптүгү бул чекиттердин абциссаларынын жардамында түзүлөт.



3.8.1-чийме.



3.8.2-чийме.

3.8.1-мисал. Графоаналитикалык ыкманын жардамында $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген оюндагы биринчи оюнчунун оптималдуу стратегиясын жана оюндун маанисин тапкыла.

Түз сызыктардын графиктери үчүн туюнтмаларды жазабыз:

$$(\xi, (1-\xi)) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f_1(\xi) = 3\xi + 2(1-\xi) = \xi + 2,$$
$$f_2(\xi) = 5\xi + (1-\xi) = 4\xi + 1,$$
$$f_3(\xi) = \xi + 5(1-\xi) = -4\xi + 5.$$

Бул үч түз сызыкты тургузабыз жана графиктен алардын төмөнкү ийилишинин максимумун табабыз. Максимумга $f_1(\xi)$ жана $f_2(\xi)$ түз сызыктарынын кесилишинде ээ болобуз. Бул функцияларды барабарлап, $\xi_* = \frac{3}{5}, v_* = 2\frac{3}{5}$ га ээ болобуз. Демек, $x^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$. #

Сүрөттөлгөн тургузуулар 2-оюнчунун оптималдуу стратегияларын табууга да мүмкүндүк берет. Мында бир нече учурлар келип чыгышы мүмкүн:

а) Алгач ийилген сынык сызык 2-оюнчунун j_0-таза стратегиясына тиешелеш келген жогорку горизонталдуу участкага ээ болсун. Бул $a_{1j_0} = a_{2j_0}$ болгондо гана аткарылат. Бул учурда 2-оюнчу жалгыз гана оптималдуу таза стратегияга ээ болот.

б) Эми ийилген сынык сызык «чоку» менен аяктасын деп болжолдойбуз. Эгерде «чокулук» чекиттин абциссасы болуп 0 же 1 эсептелинсе, анда 1-оюнчунун оптималдуу стратегиясы таза стратегия болот, ал эми 2-оюнчу үчүн оптималдуу стратегия болуп чокулук чекитке карай оң жантаюга ээ болгон түз сызыктарга тиешелеш келген анын таза стратегиялары эсептелинет. Бул таза стратегиялардын бардык аралашмасы да 2-оюнчу үчүн оптималдуу стратегия болот.

Буга аналогиялуу эле сүрөттөлүш «чоку» 1 деген абциссага ээ болгондо да байкалат.

$$v(A) = \max_{x \in X} \min_j (xA)_j = \min_j (x^* A)_j = \min_{y \in Y} \langle x^*, Ay \rangle.$$

с) Эми «чокунун» абциссасы нөлдөн да, бирден да айырмалуу болсун. Бул болсо, анын жогорку чекитинде экиден аз эмес түз сызыктар кесилишет жана алардын бири –оң жантыкка, экинчиси – терс жантыкка ээ дегенди билдирет (3.8.3-чийме). Айталы бул түз сызыктар төмөндөгүлөр болсун:

$$F_1 = a_{2j_1} + \xi(a_{1j_1} - a_{2j_1}),$$
$$F_2 = a_{2j_2} + \xi(a_{1j_2} - a_{2j_2}).$$

Эгерде 2-оюнчу өзүнүн калган стратегияларын колдонуудан баш тартса, анда келип чыккан (2×2) оюнундагы оюндун мааниси жана 1-оюнчунун жалгыз оптималдуу стратегиясы: $(\xi^*, 1 - \xi^*)$ - алгачкы оюндагыдай эле болот.

Демек, 2-оюнчу j_1, j_2 эки стратегиясын гана пайдалануу менен 1-оюнчунун $v(A)$ дан көп мааниге ээ болуусуна тоскоол болуусу мүмкүн. Анда баштапкы оюндагы 2-оюнчунун оптималдуу стратегиясы анын j_1, j_2 таза стратегияларын аралаштыруу менен алынышы мүмкүн. Ошентип, жаңы (2×2) оюнундагы 2-оюнчунун оптималдуу стратегиясы баштапкы $(2\times n)$ оюнунда дагы анын оптималдуу стратегиясы болот. Бул (2×2) оюнун эми $(m\times 2)$ оюну катары кароого болот жана жогорудагыга аналогиялуу түрдө эле 2-оюнчунун оптималдуу стратегиясын табууга болот. Бул ыкмага кеңири токтололу.

Эми матрицалык оюнда 2-оюнчу эки таза стратегияга ээ, ал эми 1-оюнчу m сандагы таза стратегияга ээ болсун. Анда бул оюндун утуш матрицасы төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}.$$

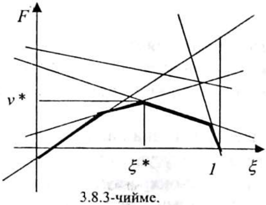
Бул көрүнүштөгү оюндун анализи жогоруда жүргүзүлгөн $(2\times n)$оюнунун анализине аналогиялуу. Мында 2-оюнчунун аралаш стратегиясы $y=(\eta,1-\eta)$ көрүнүшүндө, ал эми алардын көптүгү η нын биринчи компонентасын $[0,1]$ кесиндиси аркылуу жүргүзүүдө алынат. Эгерде 1-оюнчу өзүнүн i-таза стртатегиясын, ал эми 2-оюнчу y-аралаш стратегиясын тандаса, анда 1-оюнчунун утушу төмөндөгүгө барабар болот:

$$g_i(\eta)=(Ay)_i=a_{i1}\eta+a_{i2}(1-\eta)=(a_{i1}-a_{i2})\eta+a_{i2}.$$

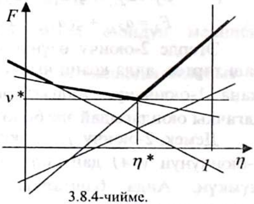
Бул утуштун η дан көз карандылыгы графикалык түрдө түз сызык аркылуу сүрөттөлөт.

$\max_i(Ay)_i=\max_i\{(a_{i1}-a_{i2})\eta+a_{i2}\}$ функциясынын графиги болуп 1-оюнчунун таза стратегияларына тиешелеш келген бардык түз сызыктардын жогорку ийилиши эсептелет (3.8.4-чийме).

Бул сынык сызыктын төмөнкү чекитинин абциссасы болуп 2-оюнчунун оптималдуу стратегиясына тиешелеш келген η^* мааниси, ал эми ординатасы болуп оюндун $v(A)$ мааниси эсептелет.



3.8.3-чийме.



3.8.4-чийме.

3.8.1-мисал. Жогоруда каралган оюндан экинчи оюнчунун оптималдуу стратегиясын табалы.

Алгач $(xA)_2 = f_2(\xi^*) > v^*$ экендигин, б.а. экинчи түз сызык биринчи жана үчүнчү түз сызыктардын кесилишинен жогору жаткандыгын белгилеп кетебиз. Мындан $y_2^* = 0$ болот. Демек, биз экинчи мамычасы жок оюнду карайбыз жана андагы экинчи оюнчунун оптималдуу стратегиясын табабыз:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ 1-\eta \end{pmatrix}$$

$$g_1(\eta) = 3\eta + (1-\eta) = 2\eta + 1,$$

$$g_2(\eta) = 2\eta + 5(1-\eta) = -3\eta + 5.$$

Бул функцияларды бири-бирине барабарлайбыз:

$$2\eta + 1 = -3\eta + 5 \Rightarrow \eta_* = \frac{4}{5}, v_* = 2\frac{3}{5}.$$

Оюндун мааниси жогорудагыдай эле болду. Жыйынтыгында $y^* = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$. #

Графоаналитикалык ыкманы оюнчулардын бири үч таза стратегияга ээ болгон учурда да колдонууга болот. Бирок, бул учурда келип чыгуучу геометриялык түзүүлөр бир кыйла ыңгайсыздыктарды пайда кылат. Эгерде ар бир оюнчу үчтөн көп таза стратегияга ээ болсо, анда оюнду графико-аналитикалык ыкма менен чечүү мүмкүн эмес.

Ошентип, (x^*, y^*, v_*) матрицалык оюнун чечүүдө графоаналитикалык ыкманы колдонууда маселенин ченеми чоң роль ойнойт.

§9. Стратегияларды доминирлөө

Матрицалык оюндун ченеми жогорулаган сайын аны чыгаруу жана анализдөө татаалдана тургандыгын жогоруда карап өттүк. Ошондуктан оюнду чыгарууда аны ченеми төмөн болгон оюнга келтирүүнүн каалагандай ыкмалары практикалык мүнөзгө ээ.

Тагыраак айтканда биз эки маселени карайбыз:

а) $\Gamma(A)$ боюнча (же A матрицасы боюнча) $C(A') \subset C(A)$ орун ала тургандай $\Gamma(A')$ камтылуучу оюнун (же A' -камтылуучу матрицасын) тургузуу; мында $C(A)$ -бул $\Gamma(A)$ оюнундагы тең салмактуулук абалдарынын көптүгү;

б) $\Gamma(A)$ боюнча $C(A') = C(A)$ орун ала тургандай $\Gamma(A')$ камтылуучу оюнун тургузуу.

Бул эки учурда тең биз $\Gamma(A')$ оюнундагы стратегияларды нөлдүк компоненталар менен толуктайбыз жана $\Gamma(A')$ камтылуучу оюнундагы аралаш стратегияларды $\Gamma(A)$ оюнундагы аралаш стратегияларга барабарлайбыз.

Оюндарды мындай редукциялоо стратегияларды доминирлөө түшүнүгүнүн эки вариантына негизделген. Мында төмөндөгүдөй барабарсыздыктар орун ала тургандыгын эске салып кетебиз:

$$v_* = \min_{y\in Y}\max_{1\le i\le m}(Ay)_i = \max_{1\le i\le m}(Ay^*)_i =$$

$$= \max_{x\in X}\min_{1\le j\le n}(xA)_j = \min_{1\le j\le n}(x^*A)_j.$$

Ошондуктан гарантияга ээ жыйынтык принцибинин негизинде биринчи оюнчунун кандайдыр бир x стратегиясынын эффективдүүлүк баасы $W(x) = \min_{1\le j\le n}(xA)_j$ көрүнүшүндө болот, ал эми экинчи оюнчу үчүн $W(y) = \max_{1\le i\le n}(Ay)_i$ ге ээ болобуз. Эгерде биринчи оюнчунун x' жана x'' стратегияларын салыштырсак, анда

$$\min_j(x'A)_j \ge \min_j(x'')_j \quad (\min_j(x'A)_j > \min_j(x'')_j)$$

шарты аткарылган учурда x' стратегиясы x'' стратегиясына карганда жаман эмес (эң жакшы) стратегия болот. Эгерде

$$\max_i(Ay')_i \le \max_i(Ay'')_i \quad (\max_i(Ay')_i < \max_i(Ay'')_i)$$

шарты орун алса, анда экинчи оюнчу үчүн y' стратегиясы y'' стратегиясына караганда жаман эмес (эң жакшы) стратегия болот. Эгерде биз бул шарттарды күчөтсөк, анда төмөндөгү аныктоого ээ болобуз.

3.9.1-аныктоо. i) Эгерде экинчи оюнчунун каалагандай таза стратегиясы үчүн

$$(x'A)_j \ge (x''A)_j, \forall j = 1,\dots,n,$$

орун алса, анда $\Gamma(A)$ оюнунда биринчи оюнчунун x' стратегиясы x'' стратегиясын доминирлейт $[x' \ge x'']$ (же x'' стратегиясы x' стратегиясы тарабынан доминирленет) деп айтабыз.

ii) Эгерде $a_{i_1 j} \ge a_{i_2 j}, \forall j = 1,\dots,n$ орун алса, анда биринчи оюнчунун i_1 -таза стратегиясы i_2 -таза стратегиясын доминирлейт, ал эми эгерде $a_{ij_1} \le a_{ij_2}, \forall i = 1,\dots,m$ орун алса, анда экинчи оюнчунун j_1 -таза стратегиясы j_2 -таза стратегиясын доминирлейт.

Доминирлөө катышы бир эле оюнчунун стратегияларына тиешелүү, ал эми биринчи жана экинчи оюнчулардын стратегияларын доминирлөө аныктоосу тутумдаш экендигин белгилеп кетебиз.

3.9.2-теорема. Эгерде $\Gamma(A)$ оюнунда биринчи оюнчунун x' стратегиясы x'' стратегиясын доминирлесе, ал эми x'' стратегиясы оптималдуу болсо, анда x' стратегиясы да оптималдуу болот.

Далилдөө. Доминирлөө аныктоосунун негизинде

$$(x''A)_j \le (x'A)_j, \forall j = 1,...,n \qquad (3.9.1).$$

Мындан

$$\min_j (x''A)_j \le \min_j (x'A)_j \qquad (3.9.2)$$

келип чыгат. x'' тин оптималдуулугун эске алсак,

$$\min_j (x''A)_j = v(A) = \max_{x \in X'} \min_j (xA)_j$$

га ээ болобуз. Ошондуктан $\min_j (x'A)_j = v(A)$ болот. Анда x' да оптималдуу. #

3.9.3-теорема. Эгерде биринчи оюнчунун i_0 -таза стратегиясы анын i_0 дон айырмалуу болгон (таза же аралаш) x стратегиясы менен доминирленсе, анда бул оюнчунун x^* оптималдуу стратегиясы жашайт жана бул стратегияга i_0 нөлдүк ыктымалдуулук менен кирет.

Далилдөө. 1) $x = (x_1,...,x_m): x \ge i_0, x_{i_0} \ne 1$ стратегиясын карайбыз.

$$x_i^0 = \begin{cases} \dfrac{x_i}{1 - x_{i_0}}, & i \ne i_0 \\ 0, & i = i_0 \end{cases}, \quad (x_{i_0} \ne 1, x \ne i_0) \qquad (3.9.3)$$

эрежесинин негизинде $x^0 = (x_1^0,...,x_m^0)$ векторун тургузабыз.

$x_i^0 \ge 0, \forall i$ жана

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \sum_{i \ne i_0} \frac{x_i}{1 - x_{i_0}} = \frac{1}{1 - x_{i_0}} \sum_{i \ne i_0} x_i = 1$$

болгондуктан x^0 вектору биринчи оюнчунун аралаш стратегиясы болуп эсептелет. Мында $i_0 \notin sup\, p(x^0)$. Теореманын шарты боюнча $(xA)_j \ge a_{i_0 j}, \forall j = 1,...,n.$

Акыркы барабарсыздыкты төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$(xA)_j = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}, \forall j = 1,...,n.$$

Эки жагынан тең жалпы көбөйтүүчү $x_{i_0} a_{i_0 j}$ ны таштап жиберип жана алынган барабарсыздыкты $(1 - x_{i_0})$ санына бөлсөк, анда төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\sum_{i\neq i_0} x_i^0 a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 a_{ij} \geq a_{i_0 j}, \forall j = 1,...,n \qquad (3.9.4) \text{ же}$$

$$(x^0 A)_j \geq a_{i_0 j}, \forall j = 1,...,n \qquad (3.9.4').$$

Бул болсо x^0 стратегиясы i_0 стратегиясын доминирлейт: $x^0 \geq i_0$ жана $x_{i_0}^0 = 0$ дегенди билдирет. Мындан сырткары (3.9.4′) ти $y \in Y$ ке скалярдык көбөйтсөк

$$(Ay)_{i_0} \leq \langle x^0, Ay \rangle, \forall y \in Y \qquad (3.9.5)$$

ге ээ болобуз.

Эми $\Gamma(A)$ оюнуна камтылуучу $\hat{\Gamma} = \Gamma(\hat{A})$ оюнун карайбыз. Бул оюнду A матрицасынан i_0 -мамычасын алып салуу менен алууга болот: $\hat{A} = A \setminus (A)_{i_0}$. Мында $\hat{x}^0$ стратегиясы –бул биринчи оюнчунун $\Gamma(\hat{A})$ оюнундагы стратегиясы болуп эсептелет жана x^0 стратегиясынан i_0 -нөлдүк компонентасын алып салуу менен келип чыгат.

2) $(\hat{x}^*, y^*) \in C(\hat{A})$, б.а

$$(\hat{A}y^*)_i \leq \langle \hat{x}^*, \hat{A}y^* \rangle \leq (\hat{x}^* \hat{A})_j, \forall i \neq i_0, \forall j = 1,...,n \qquad (3.9.6)$$

орун алсын. Анда $x_{i_0}^* = 0$ болгон $x^* = (\hat{x}^*, 0)$ векторун кийребиз жана (3.9.6)-ны төмөндөгүдөй көрүнүштө жазабыз:

$$\forall i \neq i_0, \forall j = 1,...,n: \quad (\hat{A}y^*)_i \leq \langle \hat{x}^*, \hat{A}y^* \rangle = \sum_{i\neq i_0} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* =$$

$$= \langle \hat{x}^*, Ay^* \rangle \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \leq (\hat{x}^* \hat{A})_j \overset{\Delta}{=} \sum_{i\neq i_0} a_{ij} x_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = (x^* A)_j$$

Же

$$(Ay^*)_i \leq \langle x^*, Ay^* \rangle \leq (x^* A)_j, \forall i \neq i_0, \forall j = 1,...,n \qquad (3.9.7)$$

келип чыгат.

$i = i_0$ болгондогу барабарсыздыктын сол жагындагы жетишпестик да мааниге ээ экендигин көрсөтөбүз. Чындыгында, $(\hat{x}^*, y^*) \in c(\hat{A})$ болгондуктан

$$\langle \hat{x}^0, \hat{A}y^* \rangle \leq \langle \hat{x}^*, \hat{A}y^* \rangle \leq (\hat{x}^* A)_j, \forall j = 1,...,n \qquad (3.9.8)$$

Акыркы барабарсыздыктан төмөндөгү келип чыгат:

$$\langle x^0, Ay^* \rangle = \langle \hat{x}^*, \hat{A}y^* \rangle \leq \langle x^*, Ay^* \rangle \leq (x^* A)_j \qquad (3.9.9)$$

(3.9.5)-ни эске алсак

$$(Ay^*)_{i_0} \overset{(3.9.5)}{\leq} \langle x^0, Ay^* \rangle \leq \langle x^*, Ay^* \rangle \qquad (3.9.9')$$

ке ээ болобуз. Мындан (3.9.9)-нун негизинде

$$(Ay^*)_{i_0} \le \left\langle x^*, Ay^* \right\rangle \le (x^* A)_j \qquad (3.9.10)$$

келип чыгат.

(3.9.7) жана (3.9.10) ду бириктирип, $(x^*, y^*) \in C(\Gamma)$ деп жыйынтыктайбыз. Демек, $x^*(x^*_{i_0} = 0)$-изделүүчү оптималдуу стратегия болот.#

3.9.4-эскертүү. Экинчи оюнчу үчүн 3.9.2 жана 3.9.3-теоремаларына тутумдаш теоремаларды баяндоого жана далилдөөгө мүмкүн.

3.9.5-натыйжа. i) $\Gamma(A)$ оюнундагы биринчи оюнчунун i_0-таза стратегиясы кандайдыр бир x стратегиясы аркылуу доминирленсин. $\hat{A}$ -бул A матрицасынын i_0-жолчосун алып салуудан келип чыккан матрица жана $\hat{x}^* \in X_*(\hat{A})$ болсун. Анда $\hat{x}^*$ стратегиясындагы i_0-компонентасынын ордуна нөлдү жазуудан алынган x^* стратегиясы баштапкы $(X_*(\hat{A}) \subset X_*(A))$ оюну үчүн оптималдуу болот. Мындан сырткары $v(\hat{A}) = v(A)$ орун алат;

ii) Аналогиялуу тактоолор экинчи оюнчунун доминирлөөчү стратегиялары үчүн аткарылат.

Далилдөө. 3.9.3-теоремадан $\Gamma(A)$ оюнунда биринчи оюнчу үчүн $x^* : i_0 \notin sup\, p(x^*)$ стратегиясы жашай тургандыгы келип чыгат. Мындан сырткары

$$\min_j (x^* A)_j = v(A) \qquad (3.9.11).$$

Бул x^* стратегиясын $\Gamma(\hat{A})$ оюнундагы биринчи оюнчунун $\hat{x}^*$ аралаш стратегиясы катары кароого болот жана ал үчүн төмөндөгү шарт орун алышы керек:

$$\min_{1 \le j \le n} (x^* A)_j = \min_{1 \le j \le n} (\hat{x}^* \hat{A})_j \le v(\hat{A}) \qquad (3.9.12)$$

Бул болсо (3.9.11)-нин ордуна $v(A) \le v(\hat{A})$ ны берет. Экинчи жактан

$$v(\hat{A}) = \max_{\hat{x} \in \hat{X}} \min_j (\hat{x}\hat{A})_j = \max_{x \in X, x_{i_0} = 0} \min_j (xA)_j \le$$

$$\le \max_{x \in X} \min_j (xA)_j = v(A).$$

Демек,

$$v(A) = \min_{1 \le j \le n} (\hat{x}^* A)_j = \min_{1 \le j \le n} (\hat{x}^* \hat{A})_j = v(\hat{A}).$$

Анда

$$x^* \in X_*(A).\ \#$$

Стратегияларды тапатак доминирлөө

3.9.6-аныктоо. i) Эгерде $(x'A)_j > (x''A)_j, \forall j = 1,...,n$ орун алса, анда $\Gamma(A)$ оюнунда биринчи оюнчунун x' стратегиясы x'' стратегиясын тапатак доминирлейт $[x' > x'']$ деп айтабыз.

ii) Эгерде $(Ay')_i > (Ay'')_i, \forall i = 1,...,m$ орун алса, анда $\Gamma(A)$ оюнунда экинчи оюнчунун y' стратегиясы y'' стратегиясын тапатак доминирлейт $[y' > y'']$ деп айтабыз.

3.9.7-теорема. Эгерде $\Gamma(A)$ оюнунда x'' стратегиясы x' стратегиясы аркылуу тапатак доминирленсе, анда x'' стратегиясы оптималдуу болбойт.

Далилдөө. $(x''A)_j < (x'A)_j, \forall j = 1,...,n$ болгондуктан

$$\min_j (x''A)_j < \min_j (x'A)_j \le v(A)$$

жана $x'' \notin X_*(A)$ болот. #

3.9.8-теорема. i) Эгерде биринчи оюнчунун i_0-таза стратегиясы $x \in X$ (таза же аралаш) стратегиясы аркылуу тапатак доминирленсе, анда бул оюнчунун каалагандай оптималдуу $x^* = (x_1^*,...,x_n^*) \in X_*$ стратегиясы үчүн $x_{i_0}^* = 0$ болот.

ii) Эгерде экинчи оюнчунун j_0-таза стратегиясы $y \in Y$ (таза же аралаш) стратегиясы аркылуу тапатак доминирленсе, анда бул оюнчунун каалагандай оптималдуу $y^* = (y_1^*,...,y_n^*) \in Y_*$ стратегиясы үчүн $y_{j_0}^* = 0$ болот.

Далилдөө. i) Шарт боюнча $a_{i_0 j} < (xA)_j, \forall j = 1,...,n.$

$y^* \in Y_*(A)$ -бул экинчи оюнчунун оптималдуу стратегиясы болсун. Скалярдык көбөйтүндүнү аткарсак төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$(Ay^*)_{i_0} < \langle x, Ay^* \rangle \le v(A) = \langle x^*, Ay^* \rangle \text{ же } (Ay^*)_{i_0} < v(A).$$

Мындан $x_{i_0}^* = 0, \forall x^* \in X_*$ келип чыгат. #

3.9.9-натыйжа. $\Gamma(A)$ оюнундагы биринчи оюнчунун i_0-таза стратегиясы анын кандайдыр бир стратегиясы менен доминирленсин жана $\hat{A}$ -бул A матрицасынын i_0 -жолчосун алып салуудан келип чыккан матрица болсун. Анда $X_*(A) \overset{i_0}{\underset{\to}{=}} X_*(\hat{A})$.

Далилдөө. 3.9.8-теорема боюнча $X_*(A)$ дагы ар бир стратегия өз спектринде i_0-стратегиясын кармабайт. Ошондуктан аны $\Gamma(\hat{A})$ оюнундагы стратегия катары кароого болот. Демек, $X_*(A) \subset X_*(\hat{A})$. Тескери камтылуу 3.9.3-теоремада далилденген. #

3.9.10-мисал. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 6 & 2 & 7\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген матрицалык оюнду чыгаргыла.

Биринчи оюнчунун үчүнчү таза стратегиясы анын экинчи таза стратегиясы менен тапатак доминирленет:

$$i_3 \prec i_2 \Rightarrow A_1=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 6 & 2 & 7\end{pmatrix},$$

$$j_3 \prec j_1 \Rightarrow A_2=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Алынган оюнду графо-аналитикалык ыкманын жардамында чечүүгө болот:

$$g_1(\eta)=\eta+7(1-\eta)=7-6\eta,$$
$$g_2(\eta)=6\eta+2(1-\eta)=2+4\eta,$$
$$7-6\eta=4\eta+2 \Rightarrow \eta=\frac{1}{2}.$$
$$f_1(\xi)=\xi+6(1-\xi)=6-5\xi,$$
$$f_2(\xi)=7\xi+2(1-\xi)=5\xi+2,$$
$$6-5\xi=5\xi+2 \Rightarrow \xi=\frac{2}{5}.$$

Тиешелеш келген орундарга нөлдөрдү койгондон кийин баштапкы оюндун чечимине ээ болобуз:

$$x^*=(\frac{2}{5},\frac{3}{5},0),\; y^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),\; v_*=4.$$

Доминирлөө тапатак болгондуктан бул оюндун башка чечимдери жок. #

3.9.11-мисал. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген оюнду чыгаргыла.

Доминирлөө жөнүндөгү теореманы пайдаланабыз.:

$$i_1 \geq i_2 \Rightarrow A_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$j_4 \prec j_1, j_3 \leq j_1 \Rightarrow A_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\underline{v}=\max_i \min_j a_{ij}=1, \bar{v}=\min_j \max_i a_{ij}=2.$$

Демек, оюндун мааниси $[\underline{v},\bar{v}]$ кесиндисинде жатат.

Бул оюнду оптималдуулук шартынын жардамында чечебиз.

$x^* = (\xi, 1-\xi), y^* = (\eta, 1-\eta)$ болсун. Анда оптималдуулук шарты боюнча

$$(Ay^*)_i \le v \le (x^*A)_j, \forall i, j.$$

Стратегияларды акыркы катышка коебуз:

$$2\xi + 1 - \xi = \xi + 1 \ge v,$$
$$\xi + 2 - 2\xi = 2 - \xi \ge v,$$
$$2\eta + 1 - \eta = \eta + 1 \le v,$$
$$\eta + 2 - 2\eta = 2 - \eta \le v.$$

Биринчи эки барабарсыздыкты суммалап $v \le 1{,}5$ ке, ал эми кийинки эки барабарсыздыкты суммалап $v \ge 1{,}5$ ке ээ болобуз. Мындан $v = 1{,}5$ болот. Биринчи эки барабарсыздыктан $\xi = \frac{1}{2}$ ге, кийинки эки барабарсыздыктан $\eta = \frac{1}{2}$ ге ээ болобуз. Жыйынтыгында

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right),\ v = \frac{3}{2}.$$

Доминалдаштыруу тапатак эмес болгондуктан, мында башка да оптималдуу стратегиялар болушу мүмкүн. #

3.9.12-мисал.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ оюнун чыгаргыла.

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{0, 2, 0, 0\} = 2$$

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{4, 4, 4, 8\} = 4..$$

$$i_3 \ge i_1 \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$j_3 \ge j_1 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$j_1 \le \frac{1}{2} j_2 + \frac{1}{2} j_3 \Leftrightarrow j_1 \le y = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

экендигин (б.а. 2-оюнчунун биринчи таза стратегиясы анын y аралаш стратегиясы менен доминирлене тургандыгын) белгилеп өтөбүз.

Анда жаңы матрица төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$i_1 \le \frac{1}{2} i_2 + \frac{1}{2} i_3 \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\Gamma(A_4)$ оюнун графо-аналитикалык ыкманын жардамында чыгарып, нөлдөрдү койгондон кийин баштапкы оюндун чечимин алабыз:

$$x^* = y^* = \left(0{,}0{,}\frac{2}{3}{,}\frac{1}{3}\right), \; v_* = \frac{8}{3}.$$

Мында да оюндун башка чечимдери болушу мүмкүн. #

§10. Матрицалык оюндар жана сызыктуу программалоо

Бул параграфта матрицалык оюндар жана сызыктуу программалоонун ортосундагы өз ара байланыштар каралат.

A – бул $m \times n$ ченемдүү матрица болсун. Жалпылыкты бузбастан бул матрицанын бардык элементтерин оң деп эсептейбиз.

x – бул 1-оюнчунун каалаган стратегиясы болсун. x стратегиясынын эффективдүүлүк баасы $W(x) = \min\limits_j (xA)_j$ ти карайбыз. A элементтеринин оң экендигинин негизинде $W(x) > 0, \forall x \in X$ болот.

Ошентип, биз

$$0 < W(x) \le (xA)_j, \forall j = 1,\dots,n \quad (3.10.1)$$

ге ээ болобуз. Мындан сырткары x^*-оптималдуу стратегия болот, качан гана төмөндөгү орун алганда:

$$W(x^*) = \max_x W(x) = v(A) \qquad (3.10.2)$$

Эми жаңы $\tilde{x} = \dfrac{1}{W(x)} \tilde{x}$ векторун кийрели. $\tilde{x}$ вектору үчүн (3.10.1)-барабарсыздыгы

$$(\tilde{x}A)_j \ge 1, \; j = 1,\dots,n \qquad (3.10.3)$$

көрүнүшүндө болот.

$x \in X$, б.а. $x_i \ge 0, \; \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ болгондуктан

$$\langle \tilde{x}, J_m \rangle = \frac{1}{W(x)} \qquad (3.10.4)$$

орун алат, мында $J_m = (1,...,1)^T \in R^m$. Ошондой эле $\widetilde{x} \geq 0$ (3.10.5) экендиги белгилүү.

(3.10.2)-(3.10.5)-ден төмөндөгү келип чыгат: x^*-оптималдуу стратегия болот, качан жана качан гана, качан тиешелеш келген $\widetilde{x}^*$ стратегиясы төмөндөгү сызыктуу программалоо маселесинин чечими болгондо:

$$\begin{cases} \langle \widetilde{x}^*, J_m \rangle \to min, (W(x) \to max) \\ \widetilde{x} \geq 0, (\widetilde{x}A)_j \geq 1, j = 1,...,n \end{cases} \quad (3.10.6)$$

Бул маселе сызыктуу программалоонун стндарттуу маселеси болуп эсептелет. Анын мааниси алгачкы оюндун маанисине тескери сан, ал эми сызыктууу программалоо маселесинин каалаган чечими тиешелеш нормалдаштыруудан кийин (б.а. сызыктуу программалоо маселесинин маанисине бөлгөндөн кийин) 1-оюнчунун оптималдуу стратегиясы болуп эсептелет:

$$\begin{cases} \widetilde{x}^* \in Arg\,min(3.10.6), \ (\langle \widetilde{x}^*, J_m \rangle)^{-1} = v(A), \\ x^* = v(A)\widetilde{x}^*. \end{cases} \quad (3.10.7)$$

2-оюнчунун ар бир y стратегиясы үчүн $W(y) = \max_i (Ay)_i$ ти кийрип жана $\widetilde{y} = \dfrac{1}{W(x)} y$ деп эсептесек төмөндөгү сызыктуу программалоо маселесине келебиз:

$$\begin{cases} \langle J_n, \widetilde{y} \rangle \to max, (W(y) \to min), \\ \widetilde{y} \geq 0, (A\widetilde{y})_i \leq 1, i = 1,...,m. \end{cases} \quad (3.10.8)$$

(3.10.8)-маселеси (3.10.6)-маселесине тутумдаш болот.

(3.10.8)- сызыктуу программалоо маселесинин чечими гана A матрицасы менен берилген оюнда 2-оюнчунун оптималдуу стратегиясы болот.

$$\begin{cases} \widetilde{y}^* \in Arg\,max(3.10.8), \ (\langle \widetilde{y}^*, J_n \rangle)^{-1} = v(A), \\ y^* = v(A)\widetilde{y}^*. \end{cases} \quad (3.10.9)$$

Демек, матрицалык оюнду чечүү бири-бирине тутумдаш болушкан сызыктуу программалоонун түгөй маселесин чечүүгө келтирилет, б.а. $(X_*, Y_*) \simeq (\widetilde{X}_*, \widetilde{Y}_*)$.

Бул айтылгандын тескерисинин орун алаарын көрсөтөбүз. Башкача айтканда, эгерде сызыктуу программалоонун тутумдаш түгөй маселеси чечимге ээ болсо, анда бул чечимдердин көптүгүн кандайдыр бир матрицалык чечимдердин көптүгү аркылуу толугу менен сүрөттөөгө болот.

Ошентип, матрицалык оюндар теориясы анык бир мааниде сызыктуу программалоонун стандарттуу маселелери теориясына эквиваленттүү экендиги көрсөтүлөт.

Айталы, сызыктуу программалоонун тутумдаш түгөй маселеси берилсин:

$$\begin{cases}\langle c,x\rangle \to max\\ xA \le b, x \ge 0\end{cases} \qquad (3.10.10)$$

$$\begin{cases}\langle b,y\rangle \to min\\ Ay \ge c, y \ge 0\end{cases} \qquad (3.10.11)$$

Мында $x,c \in R^m, y,b \in R^n$, A-бул $m \times n$ ченемдүү матрица.

(3.10.10)-нун биринчи барабарсыздыгын терс эмес y векторуна оң жактан скалярдуу көбөйтөлү:

$$\langle x, Ay\rangle \le \langle b, y\rangle \qquad (3.10.12)$$

(3.10.11)-нин биринчи барабарсыздыгын x ке көбөйтөлү:

$$\langle x, Ay\rangle \ge \langle c,x\rangle \qquad (3.10.13)$$

Анда (3.10.12) жана (3.10.13)-дөн төмөндөгү келип чыгат:

$$\begin{cases}\langle c,x\rangle \le \langle b,y\rangle\\ \forall x : xA \le b, x \ge 0, \forall y : Ay \ge c, y \ge 0\end{cases} \qquad (3.10.14)$$

Анда, эгерде (3.10.14)-дө барабардык орун алса: $\langle c,x\rangle \le \langle b,y\rangle$, анда $x^* \in Arg\, max(3.10.10)$, $y^* \in Arg\, min(3.10.11)$.

Башкача айтканда, бул учурда x^* жана y^*лар (3.10.10) жана (3.10.11)-маселелеринин оптималдуу чечимдери болушат.

Сызыктуу программалооонун (3.10.10) жана (3.10.11)-маселелерине байланыштуу $(m+n+1)\times(m+n+1)$ ченемдүү M матрицасын карайбыз жана аны төмөндөгүдөй блоктук формада жазабыз:

$$M = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & -A & c\\ A^T & 0_{n\times n} & -b\\ -c^T & b^T & 0\end{bmatrix}.$$

Бул матрица кососимметриялуу, $M = -M^T$. Мындай утуш матрицасына ээ болгон матрицалык оюндар симмтериялуу деп аталышат. Мындай оюндардын айрым касиеттерине токтололу.

3.10.1-сүйлөм. Айталы, кандайдыр бир $(n \times n)$ ченемдүү оюндун утуш матрицасы A-кососимметриялуу болсун:

$$A = -A^T \qquad (3.10.15)$$

Анда $v(\Gamma) = 0, X_* = Y_*$ болот.

Далилдөө. Биринчиден (3.10.15)-нин негизинде

$$\forall x, \forall y : \langle x, Ay \rangle = -\langle x, A^T y \rangle = -\langle Ax, y \rangle = -\langle y, Ax \rangle \qquad (3.10.16)$$

Эгерде $\Gamma : x \to max, y \to min, F = \langle x, Ay \rangle$ болгондо $(x^*, y^*) \in C(\Gamma(A))$ болсо, анда

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : \langle x, Ay^* \rangle \le \langle x^*, Ay^* \rangle \le \langle x^*, Ay \rangle$$

орун алат.

Акыркы барабарсыздыктан (3.10.16)-нын негизинде төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$-\langle y^*, Ax \rangle \le -\langle y^*, Ax^* \rangle \le -\langle y, Ax^* \rangle, \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Бул болсо өз учурунда төмөндөгүгө эквиваленттүү:

$$\langle y, Ax^* \rangle \le \langle y^*, Ax^* \rangle \le \langle y^*, Ax \rangle, \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Демек, $\Gamma_1 : y \to max, x \to min, F_1 = \langle y, Ax \rangle$ болгондо $(y^*, x^*) \in C(\Gamma_1(A))$ болот. Ал эми Γ_1 жана Γ_2 оюндары белгилөөлөрү менен гана айырмаланышкандыктан, мындан $X_* = Y_*$ келип чыгат. Ошондуктан,

$$v(\Gamma) = \langle x^*, Ay^* \rangle = \langle y^*, Ax^* \rangle = v(\Gamma_1)$$

болот. Бирок, (3.10.16)-нын негизинде $\langle y^*, Ax^* \rangle = -\langle x^*, Ay^* \rangle$ болгондуктан

$$v(\Gamma) = \langle x^*, Ay^* \rangle = -\langle y^*, Ax^* \rangle = -v(\Gamma_1).$$

Демек, $v(\Gamma) = v(\Gamma_1) = 0$ барабардыгы орун алат. #

M матрицасына кайрылсак, $v(M) = 0, Z_* = W_*$ деп, б.а. $\Gamma(M)$ оюнунда эки оюнчу тең бирдей оптималдуу стратегиялар көптүгүнө ээ болушат деп айта алабыз. Мындан ары биз оюндун өзүн да, андагы оюнчуну да көрсөтпөй эле жөн эле оптималдуу стратегиялар деп атайбыз.

$z = (u, v, t)$-оптималдуу стратегиялар, $u \in R^m, v \in R^n, t \in R$ болсун. Анда

$$z \in Z = \{ z \in R^{m+n+1} \,/\, z_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^{m+n+1} z_i = 1 \}$$

болгондуктан, же башкача белгилөөлөрдө

$$z \ge 0, \langle z, J_{m+n+1} \rangle = 1 \qquad (3.10.17)$$

болгондуктан,

$$(z * M)_i \ge v(M) = 0, i = 1, ..., m+n+1 \qquad (3.10.18)$$

шарт анын оптималдуулугун билдирет.

Эгерде $w \in Z$-бул 2-оюнчунун оптималдуу стратегиясы болсо, анда

$$\forall j = 1, ..., m+n+1 : v(M) = 0 \ge (Mw)_j = -(M^T w)_j = -(wM)_j$$

же $(wM)_j \ge 0$ болот.

Ошондуктан оптималдуу стратегияны мүнөздөө үчүн (3.10.18)-ден башка эч кандай кошумча маалыматтын кереги жок.

Бул байланыштар төмөндөгү теоремада кеңири баяндалат.

3.10.2-теорема. Сызыктуу программалоонун тутумдаш: (3.10.10) (түз) жана (3.10.12) (тутумдаш) –маселелери жана жогоруда сүрөттөлгөн M матрицасы берилсин. Анда

1)Эгерде $t>0$ болгондо $z=(u,v,t)\in Z_*$ -оптималдуу стратегия болсо, анда

$$x^*=\frac{1}{t}u,\ y^*=\frac{1}{t}v \qquad (1.10.19)$$

тиешелеш түрдө түз жана тутумдаш маселелердин оптималдуу чечимдери болушат;

2)Эгерде $\forall z=(u,v,t)\in Z_*$ болгондо $t=0$ болсо, анда сызыктуу программалooонун эки маселеси тең оптималдуу чечимге ээ болбойт;

3)Эгерде x^*,y^*-тиешелеш түрдө сызыктуу программалоонун түз жана тутумдаш маселлрининин чечимдери жана

$$t=\frac{1}{\langle x^*,J_m\rangle+\langle y^*,J_n\rangle+1} \qquad (3.10.20)$$

болсо, анда $(m+n+1)$-ченемдүү $z=(tx^*,ty^*,t)$ (3.10.21) вектору $\Gamma(M)$ оюнундагы оптималдуу стратегия болот.

Далилдөө.

0) (3.10.17) жана (3.10.18)-катыштарды блоктук формада жазабыз:

$$(u,v,t)\geq 0,\langle (u,v,t),J_{m+n+1}\rangle=1,$$

$$(u,v,t)\begin{bmatrix}0_{m\times m} & -A & c\\ A^T & 0_{n\times n} & -b\\ -c^T & b^T & 0\end{bmatrix}\geq 0_{m+n+1}.$$

Блоктордун үстүнөн амалдарды аткарып төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$u\geq 0,\ \ v\geq 0,\ \ t\geq 0, \qquad (3.10.22)$$

$$\langle u,J_m\rangle+\langle v,J_n\rangle+t=1, \qquad (3.10.23)$$

$$Av-tc=vA^T-tc\geq 0_m,\ (m-барабарсыздык), \qquad (3.10.24)$$

$$-uA+tb\geq 0_n,\ (n-барабарсыздык), \qquad (3.10.25)$$

$$\langle u,c\rangle-\langle v,b\rangle\geq 0. \qquad (3.10.26)$$

1) Теореманын шарты боюнча $t>0$.

(3.10.22), (3.10.24) жана (3.10.25)-ни t га бөлөбүз:

$$Ay^*\geq c,x^*A\leq b,x^*\geq 0,y^*\geq 0,$$

ал эми (3.10.26)-дан $\langle c,x^*\rangle\geq\langle b,y^*\rangle$ га ээ болобуз.

x^*, y^* лар тутумдаш сызыктуу программалоо маселелеринде мүмкүн болушкандыктан (3.10.14)-теорема боюнча $\langle c, x^* \rangle \geq \langle b, y^* \rangle$ орун алат.

Алынган барабарсыздыктар сызыктуу программалоонун (3.10.10) жана (3.10.11) түгөй маселелери үчүн x^*, y^* оптималдуу чечимдер болуша тургандыгын билдирет.

2) Эми $\forall z = (u, v, t) \in Z, t = 0$ болсун. Анда 3.7.5-теореманын негизинде (3.10.26)-да тапатак барабарсыздык орун алышы керек: $(\tilde{z}M)_{m+n+1} > 0$ же $\langle c, \tilde{u} \rangle - \langle b, \tilde{v} \rangle > 0$. Ошентип, (3.10.24)-(3.10.26)-система төмөндөгү көрүнүшкө келет:

$$A\tilde{v} \geq 0_m, \qquad (3.10.27)$$

$$\tilde{u}A \leq 0_n, \qquad (3.10.28)$$

$$\langle c, \tilde{u} \rangle > \langle b, \tilde{v} \rangle > 0. \qquad (3.10.29)$$

Мында эки мүмкүнчүлүк келип чыгат:

а) $\langle c, \tilde{u} \rangle > 0$ (3.10.30)

Түз маселеде мүмкүн болгон x векторун, турактуу $\alpha > 0$ ны алабыз жана $x + \alpha\tilde{u}$ векторун карайбыз.

(3.10.28)-нин негизинде $(x + \alpha\tilde{u})A = xA + \alpha\tilde{u}A \leq b$ орун алышы керек. Ал эми (3.10.22)-нин жана $x \geq 0$ дун негизинде $x + \alpha\tilde{u} \geq 0$ орун алат.

Анда $x + \alpha\tilde{u}$ сызыктуу программалоонун түз маселесинде мүмкүн болот. Бирок,

$$\alpha \to +\infty \text{ да } \langle (x + \alpha\tilde{u}), c \rangle = \langle c, x \rangle + \alpha \langle c, \tilde{u} \rangle \to +\infty.$$

Ошентип бул учурда сызыктуу программалоонун түз маселеси

$$\sup_x \langle c, x \rangle = +\infty, x \geq 0, xA \leq b$$

чечимине ээ болбойт.

(3.10.14)-нүн сол жагы алдын-ала берилген каалагандай сандан чоң болушун эске алсак, анда бул барабарсыздык каалагандай x үчүн орун ала тургандай y ти таба албайбыз. Анда тутумдаш маселе мүмкүн болгон векторлорго ээ эмес жана оптималдуу чечимге да ээ болбойт.

б) Эгерде $\langle c, \tilde{u} \rangle \leq 0$ деп болжолдосок, анда (3.10.29)-дан $\langle b, v \rangle < 0$ экендиги келип чыгат. Жогоркуга аналогиялуу талкуулар жүргүзсөк, анда түз маселе үчүн мүмкүн болгон векторлордун жок экендигине, ал эми тутумдаш маселенин оптималдуу чечими жок экендигине ээ болобуз.

3) Эми x^*, y^*-булар тутумдаш түгөй маселелердин оптималдуу чечимдери болушсун. (3.10.20) жана (3.10.21)-ге тиешелеш түрдө z жана t ны алабыз. Анда $z \geq 0$ жана

$$\langle z, J_{m+n+1}\rangle = t\sum_{i=1}^{m} x_i^* + \sum_{j=1}^{n} y_j^* + t =$$

$$= \frac{1}{\langle x^*, J_m\rangle + \langle y^*, J_n\rangle + 1}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^* + \sum_{j=1}^{n} y_j^* + 1\right) = 1.$$

Ошондуктан z $\Gamma(M)$ оюнунда стратегия болуп эсептелет.

Мындан сырткары,

$$zM = (tx^*, ty^*, t)\begin{bmatrix} 0_{m\times m} & -A & c \\ A^T & 0_{n\times n} & -b \\ -c^T & b^T & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= t(y^* A^T - c, -x^* A + b, \langle c, x^*\rangle - \langle b, y^*\rangle).$$

Мында, x^*, y^*-булар (3.10.10) жана (3.10.11)-нин чечимдери болушкандыктан, алар мүмкүн болгон чечимдер болушат. Ошондуктан

$$y^* A^T - c \ge 0,\ -x^* A + b \ge 0,\ \langle c, x^*\rangle - \langle b, y^*\rangle \ge 0.$$

Демек, оптималдуулук шарты

$$zM \ge 0_{m+n+1} = v(M) J_{m+n+1}$$

аткарылат. Ошондуктан z-бул каралып жаткан оюндун оптималдуу стратегиясы болот. #

Ошентип сызыктуу программалоо маселесин чечүүдөгү каалагандай ыкманы матрицалык оюнду чечүү үчүн колдонууга болот.

3.10.3-мисал. $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ матрицасы берилсин.

$M = -M^T$ болгондуктан $v_* = 0$ болот. Бул матрицаны блокторго бөлөбүз жана (3.10.10), (3.10.11)-ге тиешелеш түрдө сызыктуу программалоо маселесин түзөбүз:

$$\begin{cases} 1\cdot x \to max, \\ 2\cdot x \le 3, x \ge 0, \end{cases} \Rightarrow x^* = \frac{3}{2},$$

$$\begin{cases} 3\cdot y \to min, \\ 2\cdot y \ge 1, y \ge 0, \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}.$$

Анда

$$t = \frac{1}{\langle x^*, J_m\rangle + \langle y^*, J_n\rangle + 1} = \frac{1}{3/2 + 1/2 + 1} = \frac{1}{3}$$

жана

$$z = (tx^*, ty^*, t) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

эки оюнчу үчүн тең оптималдуу стратегия болот. #

§11. Шепли-Сноу ыкмасы

Жогорудагы параграфтарда матрицалык оюндарды чечүүдө биз $\Gamma(A)$ оюнунун бир гана чечимин издегенбиз. Эми X_* жана Y_* оптималдуу стратегиялар көптүгүн сүрөттөө маселесин коебуз. Бул көптүктөрдүн 3.6.4-теорема боюнча томпок компакттуу бош эмес көп грандыктар экендигин эске салып кетебиз. Төмөндөгүдөй аныктоолорду берели.

3.11.1-аныктоо. Эгерде $x \in D$ чекитин D көптүгүндөгү каалагандай эки чекиттин тапатак томпок комбинациясы түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болбосо, б.а.

$$x \neq \alpha y + (1-\alpha)z, \forall y, z \in D, y \neq z, \forall \alpha \in]0,1[$$

аткарылсы, анда x чекитин D көптүгүнүн *четки чекити* деп атайбыз.

(Четки чекитти аныктоо үчүн төмөндөгү айтууну пайдалансак да болот:

$$\{x = \alpha y + (1-\alpha)z, y, z \in D, \alpha \in]0,1[\} \Rightarrow \}x = y = z\}).$$

3.11.2-теорема (Крейн-Мильман теоремасы). Томпок компакттуу көптүк өзүнүн четки чекиттеринин томпок оболочкасы болуп эсептелет. #

Биздин учурларда 1-оюнчунун оптималдуу стратегияларынын X_* көптүгүнө Крейн-Мильмандын теоремасын пайдалансак, $co(ExtrX_*) = X_*$ болот. Башкача айтканда 1-оюнчунун каалагандай оптималдуу стратегиясын төмөндөгүдөй көрүнүштө көрсөтөбүз:

$$x^* = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{x}^i \text{ , мында } a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} a_i = 1, \ \hat{x}^i \in ExtrX_*.$$

2-оюнчу үчүн аналогиялуу эле жыйынтыкка ээ болобуз.

Ошентип, биздин максатыбыз $-X_*$ жана Y_* көптүктөрүнүн бардык четки чекиттерин жазуу болот. Бул учурда оптималдуу стратегиялардын көптүгү толугу менен сүрөттөлөт.

Эми оюнду өзгөртүп түзүү суроосуна токтолобуз. Тагыраак айтканда, эгерде A матрицасындагы кандайдыр бир жолчолор жана мамычалар ордун алмаштырсак, анда оюндун мааниси (б.а. оптималдуу стратегиялар көптүгү жана мааниси) кандай өзгөрө тургандыгын карайбыз. Формалдуу түрдө бул операция A матрицасын сол жана оң жактан кандайдыр бир матрица-перестановкага көбөйткөнгө эквиваленттүү.

3.11.3-аныктоо. Эгерде $P=\begin{pmatrix}(e^{i_1})^T\\ \dots\\ (e^{i_m})^T\end{pmatrix}$ болсо, анда $(m\times m)$-ченемдүү P матрицасы *матрица-перестановка* деп аталат. Мында, e^{i_k}-булар m-ченемдүү бирдик орттор, $\{i_1,\dots,i_m\}$-бул $\{1,\dots,m\}$ жыйынынын кандайдыр бир перестановкасы.

E-бирдик матрицасынын кандайдыр бир мамычалар жана жолчолорунун ордун алмаштыруудан алынган P-кубулбаган матрица болоору белгилүү. Мында $P^{-1}=P^T$ болот. Чындыгында, q_{ij}-булар P^{-1} матрицасынын элементтери болсун. Анда тескери матрицаны эсептөө формуласы боюнча $q_{ij}=\dfrac{P_{ij}}{det\,P}$, мында P_{ij} -бул p_{ij} элементинин алгебралык толуктоочусу, ал эми $det\,P=1$.

P матрицасынын структурасынын негизинде PA көбөйтүндүсү -бул A матрицасынын жолчолорунун ордун алмаштыруудан (i_k-жолчосу k-орунга алмаштырылат) келип чыгат:

$$[PA]_{kj}=\langle e^{i_k},A_j\rangle=a_{i_k j}.$$

Аналогиялуу түрдө эле, эгерде $Q=(e^{j_1},\dots,e^{j_n})$ -бул $E(n\times n)$ матрицасынан алыган матрица-перестановка болсо, анда AQ көбөйтүндүсү -бул A матрицасынын мамычаларынын ордун алмаштыруудан (j_k-мамычасы k-орунга алмаштырылат) келип чыгат.

Ошентип, $\Gamma(A)$ жана $\Gamma(\widetilde{A})$ оюндарынын «өз ара байланыштарын» карайбыз, мында $\widetilde{A}=PA$, P-бул $(m\times m)$-ченемдүү матрица-перестановкасы. Айталы, $\widetilde{X}^*,\widetilde{Y}^*$ жана $\widetilde{v}_*$ -булар тиешелеш түрдө оптималдуу стратегиялардын жана $\widetilde{A}$ матрицалуу оюндар маанилеринин көптүктөрү болушсун.

3.11.4-теорема. A жана $\widetilde{A}=PA$ матрицалары менен берилген оюндардын чечимдери төмөндөгүдөй байланышат:

$$\widetilde{X}^*=PX_*,\widetilde{Y}^*=Y_*,\widetilde{v}_*=v_*.$$

Далилдөө. 1) $\{x^*,y^*,v_*\}$ -бул $\Gamma(A)$ оюнунун чечими болсун. Анда $\{\widetilde{x}=Px^*,y^*,v_*\}$ жыйындысынын $\Gamma(\widetilde{A})$ оюнунун чечими экендигин көрсөтөбүз.

Бул үчүн оптималдуулук шарттарын текшеребиз:

$$(\widetilde{A}y^*)_k=(PAy^*)_k=(Ay^*)_{i_k}\le v_*.$$

$$P^T=P^{-1},x^*\in X$$

болгондуктан

$$(\widetilde{x}\widetilde{A})_j = (Px^*\widetilde{A})_j = (x^* P^T PA)_j =$$
$$= (x^* P^{-1} PA)_j = (x^* A)_j \ge v_*, j \in 1,...,n.$$

Демек, $\{Px^*, y^*, v_*\}$ -бул $\Gamma(\widetilde{A})$нын чечими жана
$$Px^* \in PX_* \subset \widetilde{X}_*, Y_* \subset \widetilde{Y}_* \qquad (3.11.1)$$
орун алат.

2)Тескери камтылууларды далилдөө үчүн
$$\widetilde{A} = PA \Rightarrow P^{-1}\widetilde{A} = A \Leftrightarrow P^T\widetilde{A} = A$$
экендигин белгилеп кетебиз. Ошондуктан, эгерде $(\widetilde{x}^*, \widetilde{y}^*, \widetilde{v}_*)$ -бул $\Gamma(\widetilde{A})$нын чечими болсо, анда $(P^T\widetilde{x}^*, \widetilde{y}^*, \widetilde{v}_*)$ нын $\Gamma(A)$ га чечим болоорун 1-пунктка аналогиялуу түрдө эле көрсөтүүгө болот.

Экинчи жактан бул $P^T\widetilde{x}^* \in X_*$, же $P^T\widetilde{x}^* = x^* \in X_*$, же $P^T\widetilde{X}_* \subset X_*$ дегенди билдирет жана $P^T = P^{-1}$ болгондуктан
$$PX_* \supset PP^T\widetilde{X}_* = PP^{-1}\widetilde{X}_* = \widetilde{X}_*$$
болот.

Ошентип, (3.11.1)-камтылуулар жана аларга тескери камтылуулар далилденди. #

P -кубулбаган матрица болгондуктан ал өз ара бир маанилүү болушкан X_* ны $\widetilde{X}_*$ га чагылтуусун пайда кылат. Мындай чагылтууда X_* нын четки чекити $\widetilde{X}_*$ нын четки чекитине өтөөрүн көрсөтөлү.

3.11.5-теорема. i) Эгерде x^* -бул X_* көптүгүнүн четки чекити болсо, анда $\widetilde{x} = Px^*$ -бул $\widetilde{X}_*$ көптүгүнүн четки чекити болот.

ii) Эгерде $\widetilde{x}$ -бул $\widetilde{X}_*$ дагы четки чекит болсо, анда $x^* = P^T\widetilde{x}$ -бул X_* көптүгүнүн четки чекити болот.

Далилдөө. i) Каршысынан далилдейбиз. Ушундай бир $\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2 \in \widetilde{X}_*, \widetilde{x}^1 \ne \widetilde{x}^2$ чекиттери жана $a \in]0,1[$ саны табылып
$$\widetilde{x} = a\widetilde{x}^1 + (1-a)\widetilde{x}^2 \in \widetilde{X}_*$$
орун алсын. Анда 3.11.4-теорема боюнча
$$P^T\widetilde{x} = x^*, P^T\widetilde{x}^1, P^T\widetilde{x}^2 \in X_*$$
болот. Мында
$$x^* = P^T\widetilde{x} = aP^T\widetilde{x}^1 + (1-a)P^T\widetilde{x}^2 = ax_*^1 + (1-a)x_*^2$$
жана
$$P^T\widetilde{x}^1, P^T\widetilde{x}^2 \in X_*, P^T\widetilde{x}^1 \ne P^T\widetilde{x}^2$$
болгондуктан x^* чекити X_* дагы четки чекит болбойт. Бул болсо теореманын шартына карама-каршы келет.

ii) Аналогиялуу түрдө далилденет. #

A матрицасынын мамычаларынын ордун алмаштырууда аналогиялуу жыйынтыкка ээ болобуз: эгерде $\widetilde{A} = AQ$ болсо, анда

$$\widetilde{X}_* = X_*, \widetilde{Y}^* = Y_* Q^T, \widetilde{v}_* = v_*$$

болот, мында Q -бул (nxn)-ченемдүү матрица-постановка. Бул учурда да $Q^T : Y_* \to \widetilde{Y}_*$ чагылтуусунда четки чекиттер четки чекиттерге өтүшөт.

Эми матрицалык оюндардагы бардык оптималдуу стратегияларды издөөнүн Шепли-Сноу ыкмасын сүрөттөйбүз.

3.11.6-аныктоо. i) Эгерде

$$(Ay^*)_i = v_* = (x^* A)_j, \forall i = 1,...,m, \forall j = 1,...,n$$

болсо, анда $\Gamma(A)$ оюнунун (x^*, y^*, v_*) чечимин *жөнөкөй* деп атайбыз.

ii) Эгерде жок дегенде бир жөнөкөй чечим жашаса, анда бул оюнда жөнөкөй чечимге мүмкүндүк болот деп айтабыз.

3.11.7-теорема (Шепли-Сноу теоремасы).

i) Айталы $\{x^*, y^*, v_*\}$ -бул $\Gamma(A)$ оюнунун чечими жана $v_* \neq 0$ болсун. Анда X_* жана Y_* көптүктөрү үчүн тиешелеш түрдө x^*, y^* стратегиялары четки чекиттер болушу үчүн ушундай бир (rxr) ченемдүү B камтылуучу матрицасы $(B \subset\subset A)$ табылып, $\Gamma(B)$ оюнунда $\{x^B, y^B, v_B\}$ -жөнөкөй чечими мүмкүн болсун. Мында $v_B = v_*$, ал эми $x^B \lfloor y^B \rfloor$ -бул $x^* \lfloor y^* \rfloor$ дан A матрицасынын жолчолоруна (мамычаларына) тиешелеш келген компоненталарын алып салуудан келип чыккан вектор.

ii) Башкача айтканда $(x^*_{i_s})$ жана $(y^*_{j_t})$ лар төмөндөгүдөй сызыктуу теңдемелер системаларынын чечимдери болушат:

$$\left.\begin{aligned} &(x^B B)_{j_t} = \sum_{s=1}^{r} a_{i_s j_t} x^*_{i_s} = v_*, t = 1,...,r, \\ &\sum_{s=1}^{r} x^*_{i_s} = 1 \end{aligned}\right\} \quad (3.11.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &(By^B)_{i_s} = \sum_{t=1}^{r} a_{i_s j_t} y^*_{j_t} = v_*, s = 1,...,r, \\ &\sum_{s=1}^{r} x^*_{j_{ts}} = 1 \end{aligned}\right\} \quad (3.11.3)$$

Далилдөө. 1)*Зарылдык шарты.*

а) Айталы, x^*, y^* -булар $\Gamma(A)$ оюнунун $v_* \neq 0$ маанисине тиешелеш келүүчү X_* жана Y_* көптүктөрүнүн четки чекиттери болушсун. Анда 3.4.7-теорема боюнча төмөндөгү барабарсыздыктар аткарылат:

$$\min_{1\le j\le n}(x^* A)_j = \max_{1\le i\le m}(Ay^*)_i = v_* \qquad (3.11.4)$$

(3.11.4)-дөгү максимум жана минимум маанисин берүүчү $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ матрицасындагы i жана j индекстери биринчи орунда боло тургандай кылып A матрицасынын жолчолорун жана мамычаларын кайра номерлейбиз:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* = (x^* A)_j = v_*, j=1,...,r \quad (1\le r\le n), \qquad (3.11.5)$$

$$(x^* A)_j > v_*, j>r, \qquad (3.11.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* = (Ay^*)_i = v_*, i=1,...,k \quad (1\le k\le m), \qquad (3.11.7)$$

$$(Ay^*)_i < v_*, i>k, \qquad (3.11.8)$$

(3.11.6) жана (3.11.8)-ден

$$x_i^* = 0, \forall i>k, \quad y_j^* = 0, \forall j>r \qquad (3.11.9)$$

га ээ болобуз.

Кайрадан номерлөөдө жаңы $\Gamma(A)$ оюну келип чыкты, мында $\widetilde{A}=PAQ,$ P жана Q -кандайдыр бир матрица-постановкалар. Мында x^* жана y^* стратегиялары 3.11.5-теорема боюнча $\Gamma(\widetilde{A})$ оюнундагы бурчтук чекиттер болушат.

Ошентип, (3.11.5), (3.11.7) жана (3.11.9) –дан x^* жана y^* ны аныктоо үчүн төмөндөгүдөй теңдемелер системасын чечүү керек экендиги келип чыгат:

$$\left.\begin{aligned} &(x^* A)_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i^* = v_*, j=1,...,r, \\ &\sum_{i=1}^{k} x_i^* = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.10)$$

$$\left.\begin{aligned} &(Ay^*)_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}y_j^* = v_*, i=1,...,k, \\ &\sum_{j=1}^{r} y_j^* = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.11)$$

Мындан сырткары ушундай бир $\varepsilon>0$ табылып

$$\left.\begin{aligned} &\min_{\substack{r+1\le j\le m\\ j>r}} (x^* A)_j \ge v_* + \varepsilon \\ &\max_{\substack{k+1\le i\le m\\ i>k}} (Ay^*)_i \le v_* - \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.12)$$

б) Эми $r = k$ экендигин далилдейбиз. Каршысынан далилдейли, б.а. $r \ne k$ деп болжолдойлу. Аныктык үчүн $k > r$ болсун ($k < r$ учурун аналогиялуу түрдө далилдөөгө болот).

Бул учурда x^* стратегиясынын $X_* = X_*(PAQ)$ көптүгү үчүн четки чекит болбой тургандыгын көрсөтөбүз. Бул үчүн $P = (a_i x_i^*) \in R^k$ векторуна салыштырмалуу бир тектүү теңдемелер системасын карайбыз:

$$\left.\begin{aligned} &(pA)_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}(a_i x_i^*) = 0, j = 1,...,r, \\ &\langle p, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{k} (a_i x_i^*) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.13)$$

(3.11.13)-системасынын матрицасы $((r+1)xk)$-ченемдүү жана төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{k2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1r} & a_{2r} & ... & a_{kr} \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \\ e_k^T \end{bmatrix} \qquad (3.11.14)$$

Экинчи жактан (3.11.11)-системасын төмөндөгү көрүнүштө жазууга болот:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{k1} \end{pmatrix} y_1^* + ... + \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ ... \\ a_{kr} \end{pmatrix} y_r^* - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} v_* = 0 \qquad (3.11.15)$$

Башкача айтканда

$$D^T (y^{*T}; -v_*)^T = 0, v_* \ne 0 \qquad (3.11.16)$$

Жок дегенде бир $y_i^* \ne 0$ болгондуктан, (3.11.14)-матрицанын жолчолору сызыктуу көз каранды болушат.

Анда (3.11.13)-системадагы теңдемелердин саны r ден, ал эми белгисиздердин саны $k > r$ дан ашып кетпейт. Ошондуктан (3.11.13)-система нөлдүк эмес чечимге ээ болот:

$$p = (a_1 x_1^*, ..., a_k x_k^*) \ne 0 \in R^k .$$

Бир тектүү теңдемелер системасынын чечимдеринин көптүгү камтылуучу мейкиндик болгондуктан $(-p)$ да (3.11.13)-системанын чечими болот.

P нын камтылуучу мейкиндик экендигинен жана $\alpha \overset{\Delta}{=} \max\limits_{1\le i\le k}|a_i| > 0$ ны жетишээрлик кичине тандап алууга мүмкүн болгондуктан төмөндөгүнү жазууга болот:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \max_{r+1\le i\le k}(x^* A)_j \le \alpha \max_{r+1\le i\le n}\sum_{i=1}^{k}\left|a_{ij}x_i^*\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ &0 < a < 1 \end{aligned}\right\} \tag{3.11.17}$$

Эми $p^{(s)} \in R^m$ векторлорун карайбыз:

$$p^{(1)} = (x_i^* + a_i x_i^*, (i=1,...,k), 0) \in R^m,$$
$$p^{(2)} = (x_i^* - a_i x_i^*, (i=1,...,k), 0) \in R^m,$$
$$p^{(s)} = x^* \pm (p, 0).$$

Мында (3.11.17)-нин негизинде $(1 \pm a_i)x_i^* \ge 0, i = 1,...,k,$ жана мындан сырткары

$$\left\langle p^{(s)}, e_m \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}(1 \pm a_i)x_i^* = \sum_{i=1}^{m}x_i^* \pm \sum_{i=1}^{m}a_i x_i^* = \sum_{i=1}^{m}x_i^* = 1.$$

Бул болсо, $p^{(s)} = x^* \pm (p,0), s = 1,2,$ векторлорунун мүмкүн болгон стратегиялар болуша тургандыгын билдирет.

Эми алардын оптималдуу экендигин көрсөтөбүз. Чындыгында (3.11.12)-нин негизинде төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned} &\forall j > r: \ (p^{(s)}A)_j = ((x^* \pm (p,0))A_j) = \sum_{i=1}^{k}a_{ij}(1 \pm a_i)x_i^* = \\ &= \sum_{i=1}^{k}a_{ij}x_i^* + \sum_{i=1}^{k}a_{ij}(a_i x_i^*) \overset{(3.11.12)}{\ge} v_* + \varepsilon + \sum_{i=1}^{k}a_{ij}(a_i x_i^*) \ge \\ &\ge v_* + \varepsilon - \left|\sum_{i=1}^{k}a_{ij}(a_i x_i^*)\right| \ge v_* + \varepsilon - \sum_{i=1}^{k}\left|a_{ij}(a_i x_i^*)\right| \ge \\ &\ge v_* + \varepsilon - a \max_{r+1\le j\le n}\sum_{i=1}^{k}\left|a_{ij}x_i^*\right| \overset{(3.11.17)}{\ge} v_* + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \ge v_* + \frac{\varepsilon}{2} > v_*, \ (i > r) \end{aligned} \tag{3.11.18}$$

(3.11.18)-толуктоо катары (3.11.10) жана (3.11.13)-дөн $1 \le j \le r$ үчүн төмөндөгүнү жазабыз:

$$\begin{aligned} &(p^{(s)})A_j = ((x^* \pm p)A)_j = \sum_{i=1}^{k}a_{ij}(1 \pm a_i)x_i^* = \\ &= \sum_{i=1}^{k}a_{ij}x_i^* \pm \sum_{i=1}^{k}a_{ij}a_i x_i^* = v_*, 1 \le j \le r \end{aligned} \tag{3.11.19}$$

Ошентип,

$$p^{(s)} = ((1 \pm a_1)x_1^*, ..., (1 \pm a_k)x_k^*, 0, ..., 0)^T \in R^m, s = 1,2$$

мүмкүн болгон векторлору үчүн оптималдуулук шарты орун алат, ошондуктан

$$p^{(s)} \in X_*, s = 1,2.$$

Мында

$$x^* = \frac{1}{2}(p^{(1)} + p^{(2)}).$$

Демек, x^* стратегиясы да X_* да четки чекит боло албайт.

Ошентип биз x^*-четки оптималдуу стратегия дегенге карама-каршы жыйынтыкка келдик.

Демек, $k \le r$ болот. Аналогиялуу түрдө эле, эгерде $r < k$ деп болжолдосок, анда y^* -четки оптималдуу стратегия дегенге карама-каршы жыйынтыкка келебиз. Анда $k = r$ болот.

c) $v_* \neq 0$ болушунан

$$det\,\widetilde{B} \overset{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.11.20)$$

келип чыгаарын көрсөтөбүз.

Каршысынан далилдейли, б.а. $det\,B = 0$ болсун. $v_* \neq 0$ болгондуктан (3.11.15)-барабарсыздыгынан (3.11.14)-дөгү D матрицасынын акыркы жолчосу калган жолчолорунун сызыктуу комбинациясы боло тургандыгы келип чыгат. Анда, эгерде (3.11.20)-туура эмес болсо, анда D матрицасынын көз каранды эмес жолчолорунун саны $r-1$ ден көп эмес.

Анда $r = k$ болгондо (3.11.13)-системадагы белгисиздердин саны r көз каранды эмес теңдемелердин санынан көп болот. Ошондуктан (3.11.14)-системанын тривиалдуу эмес чечими жашайт.

$r > k$ учуру үчүн аналогиялуу түрдө эле $x^* \in extrX_*$ болушуна карма-каршы келебиз. Демек, (3.11.20)-далилденди.

d) Эгерде (3.11.10) жана (3.11.11) системалары A матрицасынын тиешелеш келген жолчо жана мамычаларынын ордун алмаштыруудан келип чыккандыгын эске алсак, анда теорема далилденди жана $B = P^T\widetilde{B}Q^T$ болот.

2) *Жетиштүүлүк шарты.* Айталы, A да кубулбаган B-квадраттык камтылуучу матрицасы жашасын жана $\{x^B, y^B, v_B\}$ -анын мүмкүн болгон жөнөкөй чечими жана $v_B = v_*$ болсун. Мында x^B жана y^B боюнча тиешелеш түрдө x^* жана y^*стратегиялары табылат.

Жалпылыкты бузбастан B төмөндөгүдөй көрүнүштө болсун:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}, \qquad x^*=\begin{pmatrix} x^B \\ 0 \end{pmatrix}, \; y^*=\begin{pmatrix} y^B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Айталы, x^* -бул X_* көптүгүнүн четки чекити болбосун, б.а.

$$\exists \hat{x},\breve{x} \in X_*, \exists a \in \left]0,1\right[: \; x^* = a\hat{x}+(1-a)\breve{x}, \; \hat{x} \neq \breve{x}.$$

Анда

$$\hat{x}_i \ge 0, \breve{x}_i \ge 0, a>0, (1-a)>0$$

болгондуктан $\hat{x}=\begin{pmatrix} \hat{x}^B \\ 0 \end{pmatrix}$, $\breve{x}=\begin{pmatrix} \breve{x}^B \\ 0 \end{pmatrix}$, б.а. $x^*=\begin{pmatrix} x^B \\ 0 \end{pmatrix}$ га ээ болобуз.

Мында $\hat{x}^B, \breve{x}^B \in R^r$.

$\hat{x},\breve{x} \in X_*$ жана

$$\left.\begin{aligned} (\breve{x}A)_j &= \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\breve{x}_i^{\,B} = (\breve{x}^B B)_j \ge v_B, 1 \le j \le r, \\ (\hat{x}A)_j &= \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\hat{x}_i^{\,B} = (\hat{x}^B B)_j \ge v_B, 1 \le j \le r, \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.21)$$

болгондуктан $\hat{x}^B, \breve{x}^B$-лар $\Gamma(B)$ оюнунда да оптималдуу стратегиялар болушат.

Ал эми $x^B = a\hat{x}^B+(1-a)\breve{x}^B$ да оюндун жөнөкөй чечими болгондуктан

$$(x^B B)_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i^B = v_B = a\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\hat{x}_i^B + (1-a)\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\breve{x}_i^B, j=1,\dots,r \qquad (3.11.22)$$

орун алат.

Эгерде (3.11.21)-барабарсыздыктардын жок дегенде бири тапатак болсо, анда (3.11.22)-нин жардамында төмөндөгү келип чыгат:

$$v_B = a\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\hat{x}_i^B + (1-a)\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\breve{x}_i^B > av_B + (1-a)v_B = v_B.$$

Бирок, мындай болушу мүмкүн эмес. Анда

$$(\hat{x}^B B)_j = (\breve{x}^B B)_j = v_B, j=1,\dots,r \qquad (3.11.23)$$

Ошентип, $\breve{x}^B$ жана $\hat{x}^B$ векторлору B-кубулбаган матрицасы менен берилген сызыктуу теңдемелер системасынын эки түрдүү чечимдери болушат, бирок, мындай болушу мүмкүн эмес. Алынган карама-каршылык $x^* \in ExtraX_*$ экендигин далилдейт. Экинчи оюнчу жана анын y^*-оптималдуу стратегиясы үчүн аналогиялуу түрдө эле $y^* \in ExtraY_*$ га ээ болобуз. Жетиштүү шарты далилденди. #

3.11.8-натыйжа. (3.11.2) жана (3.11.3)-дөн төмөндөгү формулалар келип чыгат:

$$\left.\begin{aligned} x^B &= v_* J_r B^{-1} \\ y^B &= v_* B^{-1} J_r \end{aligned}\right\} \tag{3.11.24}$$

$$v^* = \left\langle J_r B^{-1}, J_r \right\rangle^{-1} \tag{3.11.25}$$

мында $J = J_r = (1,1,...,1)^T \in R^r$.

Далилдөө. (3.11.2)-(3.11.3)-система төмөндөгү көрүнүшкө ээ болот:

$$x^B B = v_* J, \ \left\langle J, x^B \right\rangle = 1 \tag{3.11.26}$$

$$B y^B = v_* J, \ \left\langle J, y^B \right\rangle = 1 \tag{3.11.27}$$

Мындан B^{-1} ге оң жана сол жактан көбөйтсөк, тиешелеш түрдө (3.11.24) жана (3.11.25) ни алабыз:

$$x^B = v_* J B^{-1}, \ y^B = v_* B^{-1} J.$$

Акыркы формулаларды J га скалярдуу көбөйтүп жана (3.11.26), (3.11.27) деги акыркы барабарсыздыктарды пайдалансак, анда

$$1 = \left\langle x^B, J \right\rangle = v_* \left\langle J B^{-1}, J \right\rangle$$

$$1 = \left\langle J, y^B \right\rangle = v_* \left\langle J, B^{-1} J \right\rangle$$

га ээ болобуз.

Ал эми мындан (3.11.25)-келип чыгат. #

3.11.9-натыйжа. $\Gamma(A)$ оюнундагы оптималдуу стратегиялардын X_* жана Y_* көптүктөрү томпок көп грандыктар болушат.

Далилдөө. а) Айталы, $v_* \neq 0$ болсун. A матрицасы чектүү сандагы кубулбаган B камтылуучу матрицаларына ээ болгондуктан 3.11.7-теорема боюнча X_* жана Y_* көптүктөрү чектүү сандагы четки чекиттерге ээ болушат. Анда X_* жана Y_* -томпок көп грандыктар:

$$X_* = co(extr X_*), \ Y_* = co(extr Y_*).$$

б) Эгерде $v_* = 0$ болсо, анда $A_c = \lfloor a_{ij} + c \rfloor, c > 0$ матрицасын түзөбүз. Жогорудагыдай эле талкуу жүргүзүп, $X_*(A_c)$ жана $Y_*(A_c)$ нын көп грандык экендигин алабыз жана $X_* = X_*(A_c)$, $Y_* = Y_*(A_c)$ #

Матрицалык оюнду толук чечүү Шепли-Сноу теоремасы боюнча оюндун A матрицасынын бардык квадраттык B камтылуучу матрицаларын чогултууга жана (3.11.2), (3.11.3)-сызыктуу теңдемелер ситемаларын чыгарууга келтирилет. Эгерде

$v \neq 0$ болсо, анда бул системалар же жалгыз чечимге ээ болушат, же чечимге ээ болушпайт.

Алынган чечимди терс эместүүлүккө жана

$$(Ay^*)_i \leq v \leq (x^* A)_j$$

оптималдуулук шартынын орун алышын текшерүү керек. Эгерде бул катыштардын бардыгы орун алса, анда (3.11.2), (3.11.3)-системаларынын чечимдери оптималдуу стратегиялар болушат.

A матрицасынын ченеми жогорулаган сайын Шепли-Сноу ыкмасын пайдаланып чыгаруу кыйындайт. Ошондуктан ашыкча жолчо жана мамычаларды доминирлөө принцибинин негизинде сызып салуу керек.

3.11.10-мисал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген оюндун бир чечимин тапкыла.

Тандап алууну эң жогорку ченемдүү квадраттык матрицалардан, б.а. 3×3 ченемдүү матрицадан баштайбыз.

Акыркы мамычасы сызылып ташталган матрицаны карайбыз. Анда (3.11.2) жана (3.11.3)-системалары төмөндөгүнү берет:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad xB = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = v \\ 2x_1 + x_2 = v \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}, \quad By = \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = v \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 = v \\ 3y_1 + 2y_3 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}.$$

Бул системаларды чыгарып

$$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), v = \frac{3}{2}$$

ге ээ болобуз. Бардык компоненталар терс эмес, демек алынган чечим толугу менен оюндун чечими болушу мүмкүн. Текшерүү максатында сызылып салынган мамыча үчүн оптималдуулук шартын текшеребиз:

$$(x^* A)_4 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + \frac{1}{3} > v = \frac{3}{2}.$$

Бул шарт да аткарылат. Демек, берилген оюндун чечими болуп

$$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), v = \frac{3}{2}$$

эсептелет.#

3.11.11-мисал. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ матрицасы менен берилген оюндун бардык чечимдерин тапкыла.

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү кийребиз:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$1)\ xB=v,\left.\begin{array}{l}2x_1+x_2=v\\ 4x_1=v\\ x_1+x_2=1\end{array}\right\}$$

Бул системанын чечими болуп төмөндөгү вектор эсептелет:

$$x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{2}{3}, v=\frac{4}{3}.$$

$$By=v,\left.\begin{array}{l}2y_1+4y_2=v\\ y_1=v\\ y_1+y_2=1\end{array}\right\}$$

Бул системаны чыгарып $y_1=\frac{4}{3}>1$ ге ээ болобуз. Бирок, мындай болушу мүмкүн эмес, ошондуктан бул вариантты карабайбыз.

$$2)\ xC=v,\left.\begin{array}{l}2x_1+x_2=v\\ 4x_2=v\\ x_1+x_2=1\end{array}\right\}$$

Бул системанын чечими болуп $x_1=\frac{3}{5}, x_2=\frac{2}{5}, v=\frac{8}{5}$ вектору эсептелет.

$$Cy=v,\left.\begin{array}{l}2y_1=v\\ y_1+4y_2=v\\ y_1+y_2=1\end{array}\right\}$$

Бул системанын чечими $y_1=\frac{4}{5}, y_2=\frac{1}{5}, v=\frac{8}{5}$ вектору менен берилет.

Сызылып салынган мамыча үчүн оптималдуулук шартын текшеребиз:

$$(x^* A)_2=(\frac{3}{5},\frac{2}{5})\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}=\frac{12}{15}>\frac{8}{5}.$$

Ошентип, оюндун чечими $x^*=(\frac{3}{5},\frac{2}{5}), v_*=\frac{8}{5}, y^*=(\frac{4}{5},0,\frac{1}{5})$ болот.

$$3)\; xD = v, \left.\begin{aligned} 4x_1 &= v \\ 4x_2 &= v \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

системасынын чечими $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, v = 2$ вектору болот.

$$Dy = v, \left.\begin{aligned} 4y_1 &= v \\ 4y_2 &= v \\ y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

системасы үчүн чечим $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, v = 2$ болот. Ошентип,

$$x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), v_* = 2, y^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

Сызылып салынган мамыча үчүн оптималдуулук шарты орун албайт:

$$(x^* A)_l = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} < 2.$$

Ошондуктан бул вариант чечим катары каралышы мүмкүн эмес. Жыйынтыгында $\Gamma(A)$ оюну бир гана

$$x^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}), v_* = \frac{8}{5}, y^* = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$$

чечимине ээ болот. #

Колдонулган адабияттар

1. А.С. Стрекаловский. Введение в теорию игр. –Иркутск: Иркутский университет, 2003 г.
2. Л.С. Костевич, А.А. Лапко. Теория игр. Исследование операций. - Минск: Вышэйшая школа, 1982 г.
3. В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Даитбеков и др. Экономико- математические методы и прикладные модели. - Москва: ЮНИТИ, 2000 г.
4. Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. Математические методы и модели в управлении. - Москва: «Дело», 2000 г.
5. С.Т. Раманкулов. Методы и модели исследования операций в экономике.- Бишкек, 2002 г.
6. Л.А.Петросян и др. Теория игр. –Москва: «Высшая школа»,1984 г.
7. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Гришин, М.Н. Фридман. Исследование операций в экономике. – Москва: ЮНИТИ, 1997 г.
8. Н.Н. Воробьев. Бесконечные антагонистические игры.- Москва: «Высшая школа», 1963 г.
9. Г.П. Фомин. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. - Москва: «Финансы и статистика», 2001 г.
10. О.О.Замков, Ю.А.Черемных, А.В.Толстопятенко. Математические методы в экономике, 2-е издание. - Москва: «Дело и Сервис», 1998 г.

Басууга берилди: 16.06.2006.

Формат: 60x84 1/16
Буйрутма: №57

Көлөмү: 6,5 б.т.
Нускасы: 200 даана.

ОшМУ, "Билим" басма борбору
Ош ш., Ленин к., 331, каб.135., тел.: 7.20.61